ANALYSE II, 2012-2013, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 07 janvier 2013— Solutions
Version : 11 février 2013 (V1 : 05/02/13)

THEORIE (35 points)

Théorie 1

1.1) Enoncer et démontrer le théorème de Liouville relatif à la caractérisation des fonctions entières avec bornation ≪ polynomiale ≫.

1.2) Définir les notions de zéro d'ordre fini et infini d'une fonction holomorphe. Définir ce que l'on appelle zéro isolé.

Théorie 2

Enoncer et démontrer ce que l'on appelle ≪ théorème de transfert ≫ dans le cadre des transformées de Fourier des fonctions intégrables.

Solution. Cf cours (syllabus et cours en amphi)

EXERCICES (65 points)

Exercice 1 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

1.1) - Soit $\vec{f}$ une fonction vectorielle d'une variable réelle définie sur l'intervalle ouvert I. On suppose que $\vec{f}$ est dérivable sur I et de norme constante. Démontrer qu'en tout point $t \in I$, le vecteur $\vec{f}(t)$ est orthogonal au vecteur $D\vec{f}(t)$.
- Illustrer ce résultat en donnant une représentation graphique de celui-ci lorsque $\vec{f}(t) = [\cos(t), \sin(t)], t \in \mathbb{R}$.

1.2) Soit $\vec{f}(x,y) = [f_1(x,y), f_2(x,y)] = \left[\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right]$ et soit le compact K (anneau) du plan défini par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

- Représenter K.
- En calculant chacun des deux membres de l'égalité séparément, vérifier la formule suivante avec ces données (il s'agit de la formule de Green traditionnelle, écrite de manière équivalente) :

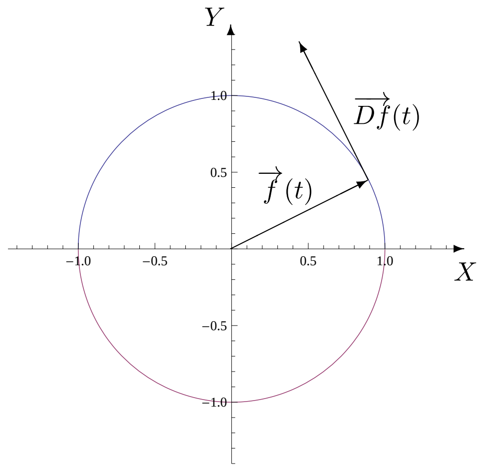
$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \bullet \vec{t} \, ds \ = \ \iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) \ dx \ dy$$

où $\mathcal{C}$ est la courbe constituée par le bord de K et $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire en un point de celle-ci.

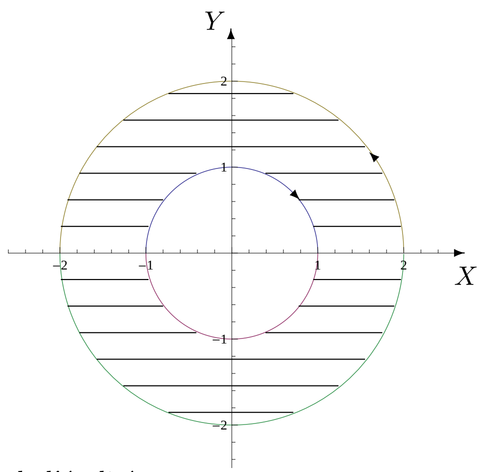
Solution. 1.1) Soit $t \in I$. Le carré de la norme du vecteur $\vec{f}(t)$ est égal au produit scalaire de $\vec{f}(t)$ avec lui-même. Comme la norme est constante, la dérivée de son carré est nulle en tout $t \in I$. Il s'ensuit que

$$0 = D\left(\vec{f}(t) \bullet \vec{f}(t)\right) = 2\vec{f}(t) \bullet D\vec{f}(t), \quad t \in I,$$

ce qui donne bien l'orthogonalité annoncée. Une illustration est donnée par la représentation ci-dessous.



1.2) Voici une représentation du compact K. Le bord de cet ensemble est constitué des circonférences d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$, qu'il convient d'orienter « aire à gauche » pour le calcul du membre de gauche de la relation à vérifier.



Calcul du membre de gauche de l'égalité.

Un paramétrage de la courbe orientée est donné par la juxtaposition des chemins $\overrightarrow{\gamma_1}, \overrightarrow{\gamma_2}$ où $\overrightarrow{\gamma_1}(t) = [2\cos(t), 2\sin(t)],\ t \in [0, 2\pi]$ et $(-\overrightarrow{\gamma_2})(t) = [\cos(t), \sin(t)],\ t \in [0, 2\pi]$. En utilisant la définition d'une intégrale sur une courbe, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \bullet \vec{t}\, ds &= \int_0^{2\pi} \Big(f_1(2\cos(t), 2\sin(t)) \ .\ 2\ .\ D\cos(t) \ + \ f_2(2\cos(t), 2\sin(t)) \ .\ 2\ .\ D\sin(t) \Big)\ dt \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \Big(f_1(\cos(t), \sin(t))\ D\cos(t) \ + \ f_2(\cos(t), \sin(t))\ D\sin(t) \Big)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)\ dt \ - \ \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)\ dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Calcul du membre de droite de l'égalité.

On a

$$D_x f_2(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = D_y f_1(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

La fonction à intégrer est donc nulle, et par suite son intégrale aussi.

Exercice 2 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

2.1) On donne les fonctions f et g par

$$f(z)=\frac{\sin(iz)}{z^2},\quad g(z)=\frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
b) Quels sont leurs zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?
c) Quelles sont les singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
e) Pour f, déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées et préciser quelles sont les fonctions « h » et « H ».

2.2) Soit γ le paramétrage classique injectif de la circonférence centrée en i, de rayon 1 et orientée dans le sens trigonométrique. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_\gamma z dz,\quad \int_\gamma \overline{z} dz,\quad \int_\gamma \frac{1}{z-i}dz,\quad \int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2}dz$$

2.3) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{16x^4+9}\,dx$$

Solution. 2.1) *Cas de la fonction f.*

a) La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0 car $\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin(iz)}{z}\ \frac{1}{z}\right)=\infty$.

b) Les zéros de f sont les zéros de la fonction $z\mapsto\sin(iz)$ à l'exception de 0, à savoir les complexes $z_m=im\pi,\ m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Chacun de ces zéros est un zéro simple du numérateur car $D\sin(iz)=i\cos(iz)$ ne s'y annule pas. On peut donc écrire (avec F_m holomorphe dans $\mathbb{C}$) :

$$f(z)=(z-z_m)\frac{F_m(z)}{z^2},\quad \frac{F_m(z_m)}{z_m^2}\neq 0$$

ce qui indique que z_m est un zéro de multiplicité 1 pour f.

c) La seule singularité isolée de f est 0 et c'est un pôle d'ordre 1 car

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(iz)}{z}=i\lim_{z\to 0}\frac{\sin(iz)}{iz}=i\neq 0.$$

d) Le résidu en le pôle 0 d'ordre 1 est

$$Res_0 f=\lim_{z\to 0} zf(z)=i.$$

e) Le développement de Taylor de la fonction sinus en 0 est

$$\sin z=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!},\ z\in\mathbb{C}.$$

On a donc

$$f(z)=i\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^{2m-1}}{(2m+1)!},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Le développement de Laurent demandé est donc

$$f(z)=h(z)+H\left(\frac{1}{z}\right),\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

avec

$$h(z) = i\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^{2m-1}}{(2m+1)!} = \frac{\sin(iz) - iz}{z^2},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad H(Z) = iZ,\ Z \in \mathbb{C}.$$

2.1) *Cas de la fonction g.*

a) La fonction g est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, à savoir dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0 car

$$\lim_{z\to i} g(z) = \lim_{z\to i} e^{iz}\ \lim_{z\to i} \frac{1}{1+z^2} = e^{-1}\ \lim_{z\to i} \frac{1}{1+z^2} = \infty$$

et de même pour la limite en $-i$.

b) La fonction g n'a pas de zéro car la fonction exponentielle (numérateur) n'a pas de zéro.

c) Les singularités isolées de g sont i et $-i$. Il s'agit de pôles d'ordre 1 car

$$\lim_{z\to i}(z-i)g(z) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e} \neq 0$$

et

$$\lim_{z\to -i}(z+i)g(z) = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e}{-2i} = \frac{ie}{2} \neq 0$$

d) Les résidus en les pôles d'ordre 1 sont donnés par

$$Res_i g = \lim_{z\to i}((z-i)g(z)) = -\frac{i}{2e}, \quad Res_{-i} g = \lim_{z\to -i}((z+i)g(z)) = \frac{ie}{2}.$$

2.2) La première intégrale est nulle car il s'agit de l'intégrale d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ sur un chemin homotope à un chemin constant. Elle se calcule aussi très aisément en utilisant la définition des intégrales curvilignes.

La deuxième intégrale se calcule directement, en appliquant la définition des intégrales curvilignes et en tenant compte de l'expression du chemin $\gamma(t) = i + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$:

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} (-i + e^{-it})\ ie^{it}\ dt = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi$$

Les deux dernières intégrales se calculent directement en utilisant $\gamma(t) = i + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$; on peut aussi invoquer la formule de représentation de Cauchy (pour $f(z) = 1$). On a

$$\int_\gamma \frac{1}{z-i}dz = 2i\pi, \quad \int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2}dz = 0$$

2.3) La fonction à intégrer est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle y est continue et, après, mulitplication par x^2, elle admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela étant, en utilisant le changement de variables $t = \frac{2}{\sqrt{3}}x$ entre $\mathbb{R}$ et lui-même, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{16x^4+9}\ dx\ =\ \frac{\sqrt{3}}{18}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^4}dt.$$

Pour la suite des calculs, nous renvoyons au cours (et aux notes de cours) car cet exercice a été résolu explicitement à l'occasion d'une séance de cours. On trouve finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{16x^4+9}\ dx\ =\ \frac{\sqrt{6}}{36}\pi$$

Exercice 3

3.1) Déterminer la transformée de Fourier ($-$) de la fonction f donnée explicitement ci-dessous

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } x \in [0,1] \\ 0 & \textbf{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

3.2) On se place dans l'espace $L^2([0,\pi])$ muni du produit scalaire habituel. Dans cet espace,
- donner un exemple de deux fonctions à valeurs complexes orthogonales
- un exemple de fonction à valeurs complexes de norme égale à 1.
Justifier vos exemples par le calcul explicite du produit scalaire et de la norme.

Solution. 3.1) La fonction f est la fonction caractéristique de l' intervalle borné et fermé $[0,1]$; elle est donc intégrable car elle est continue sur $[0,1]$ et nulle en dehors. Cela étant, quel que soit le réel y, on a

$$\mathcal{F}_y^- f = \int_0^1 e^{-ixy}\, dx = \begin{cases} \frac{1-e^{-iy}}{-iy} = i\frac{e^{-iy}-1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

3.2) Les fonctions $f(x) = e^{2ix},\ x \in [0,2\pi]$ et $g(x) = e^{-2ix},\ x \in [0,\pi]$ sont continues sur le borné fermé $[0,\pi]$, donc leur carré y est intégrable ; elles appartiennent donc bien à l'espace $L^2([0,\pi])$. Ces fonctions sont orthogonales (i.e. leur produit scalaire est nul) car

$$< f, g >= \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_0^\pi e^{4ix}\, dx = \frac{e^{4i\pi}-1}{4i} = 0.$$

La fonction $f/\sqrt{\pi}$ est de norme égale à 1 car

$$\left\| \frac{f}{\sqrt{\pi}} \right\| = \sqrt{\int_0^\pi \frac{|f(x)|^2}{\pi} dx} = \sqrt{\int_0^\pi \frac{1}{\pi} dx} = 1.$$

<u>Exercice 4</u> **Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux et justifier.**
(4.1) La fonction $z \mapsto \exp(iz)$ est bornée dans $\mathbb{C}$

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; on définit F par $F(z) = f(\frac{1}{z})$.
(4.2) Si 0 est singularité essentielle de f, alors c'est aussi une singularité essentielle de F.
(4.3) Si 0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$ de f, alors c'est aussi un pôle d'ordre p de F.

Solution. 4.1) Faux car (par exemple) en prenant la suite $z_m = -im,\ m \in \mathbb{N}$, on a $\exp(iz_m) = \exp(m)$ quel que soit le naturel m et la suite $\exp(m)(m \in \mathbb{N})$ converge vers $+\infty$.

4.2) Faux en considérant par exemple la fonction $f(z) = \exp(1/z),\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a en effet $F(z) = \exp(z)$, et cette expression définit une fonction holomorphe dans le plan tout entier.

4.3) Faux en considérant par exemple la fonction $f(z) = 1/z^p,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a en effet $F(z) = z^p$, et cette expression définit une fonction holomorphe dans le plan tout entier.

FB, 11 février 2013 (V1 : 05/02/13)