Analyse II Solution d'une partie de l'exercice 6 du TD du 13 décembre 2013

Soient Ω un ouvert du plan complexe, $z_0 \in \Omega$ et une fonction f holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$.
(1) Si le résidu de f est nul en z_0, alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω.
(2) Si le résidu de f est nul en z_0, alors le résidu de Df l'est aussi.
(3) Si le résidu de Df est nul en z_0, alors le résidu de f l'est aussi.
(4) Si z_0 est une singularité essentielle pour f, alors il en est de même pour Df.
(5) Le point z_0 est un pôle d'ordre fini (non nul) pour f si et seulement si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
(6) Le point z_0 est une singularité essentielle pour f si et seulement si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ n'existe pas.

Solution (résumé).

(1) Faux.
Exemple: $\Omega = \mathbb{C},\ z_0 = 0,\ f(z) = \frac{1}{z^2}$.

(2) Vrai.
Utiliser la décomposition de Laurent.

(3) Faux.
Exemple: $\Omega = \mathbb{C},\ z_0 = 0,\ f(z) = \frac{1}{z}$.

(4) Vrai.
Utiliser la décomposition de Laurent.

(5) Vrai.
Si z_0 est un pôle d'ordre fini (non nul) pour f, alors il existe un naturel strictement positif p et une fonction g holomorphe au voisinage de z_0, non nulle en z_0 telle que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}$. Dès lors $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Réciproquement, si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ alors il existe $r > 0$ tel que $|f(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \Omega$ tel que $0 < |z - z_0| \leq r$. Dès lors $1/f$ est holomorphe dans un voisinage de z_0, z_0 exclu. Cette fonction admet une limite nulle en z_0, donc elle se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 et z_0 en est un zéro de multiplicité p (naturel strictement positif). Il s'ensuit qu'il existe une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0, non nulle en z_0 telle que $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^p\ g(z)$ au voisinage de z_0 (z_0 exclu). Finalement, on a $f(z) = \frac{1/g(z)}{(z-z_0)^p}$ au voisinage de z_0 (z_0 exclu). D'où la conclusion.

(6) Vrai.
Cela découle directement du point précédent et des propriétés relatives aux pôles.