Université de Liège

Analyse II, Exercices

Deuxième année de bachelier Ingénieur civil

Année académique 2014-2015

Référence : MATH0007-4 *Analyse mathématique II* Françoise Bastin

Introduction

Cette version du fascicule d'exercices a été préparée à partir des listes « type » relatives au cours *Analyse II*, deuxième bachelier Ingénieur civil, enseigné depuis l'année académique 2006-2007 par F. Bastin. Dans un premier temps, il s'agit donc de rassembler les listes et corrections des années précédentes, lesquelles ont été amendées, ajustées au cours du temps et dont vous trouverez ici la compilation se basant sur les toutes dernières versions (2011-2012).

Merci à toute l'équipe qui a contribué à la réalisation de ce document.

Des compléments d'information, etc, se trouvent également sur les pages web relatives au cours. La référence « EK » dont il est fait mention est celle qui est donnée comme livre de référence pour le cours (*Advanced Engineering Mathematics,* Erwin Kreiszig) et dont plusieurs exemplaires se trouvent à la bibliothèque.

Françoise Bastin,
24 août 2012.

La vraie science est une ignorance qui se sait (Montaigne).

Chapitre 1

Rappels

Ce chapitre est constitué d'exercices de rappels sur de la matière de base d'analyse (supposée connue) et qui sera abondamment utilisée dans la suite.

1.1 EXERCICES PROPOSES

1.1.1 Dérivation des fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles

1. (a) Déterminer les domaines de définition et d'infinie dérivabilité des fonctions f, g et h données explicitement ci-dessous.
   Représenter ces domaines.
   $$f(x,y) = \ln\left(e^{x+y} - e^{\frac{1}{x-y}}\right), \quad g(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \quad h(x,y) = \sqrt{x^2+y+1}.$$

   (b) Déterminer l'expression explicite de
   $$|x|D_x g(x,y) + |y|D_y g(x,y).$$

2. On donne la fonction g, dérivable sur $]1,+\infty[$ et de dérivée
   $$g'(x) = Dg(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1.$$
   On pose ensuite
   $$F(x) = g\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$
   Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction F, ainsi que l'expression de sa dérivée.

3. (a) Déterminer dans quel ensemble la fonction f de deux variables réelles définie explicitement par
   $$f(x,y) = \ln\left(16 - 4x^2 - 4y^2\right)$$
   est continûment dérivable et représenter graphiquement ce domaine (en le hachurant).

(b) Déterminer l'expression explicite de la fonction F définie par

$$F(t) = f(t-1, t+1).$$

(c) Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression explicite de la dérivée de F.

4. On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]-2,3[\times]0,+\infty[$.
   Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction

$$F \ : \ t \mapsto f(t^2 - 2t, e^{-t} - 1)$$

   et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de f.

5. Exercice 1 page 403 dans EK.

1.1.2 Intégration (Lebesgue) à une ou plusieurs variables

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction f_j est intégrable sur l'ensemble A_j.

   (a) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sin x}, \quad A_1 = [-1, 1]$

   (b) $f_2(x) = \dfrac{x}{\sin x}, \quad A_2 = [-1, 1]$

   (c) $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}, \quad A_3 = [0, +\infty[$

   (d) $f_4(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}, \quad A_4 = [0, +\infty[$

   (e) $f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad A_{5a} =]0, 1]$ et $A_{5b} = [1, +\infty[$

   (f) $f_6(x) = e^{-|x|}, \quad A_6 = \mathbb{R}$

   (g) $f_7(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}, \quad A_7 = [0, +\infty[$

   (h) $f_8(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad A_8 =]0, 1]$

   (i) $f_9(x) = e^{-ix}, \quad A_9 = [0, +\infty[$

2. (a) Donner une représentation graphique de la partie du plan définie analytiquement par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, e^x\}\right\}.$$

   Calculer l'aire de cet ensemble.

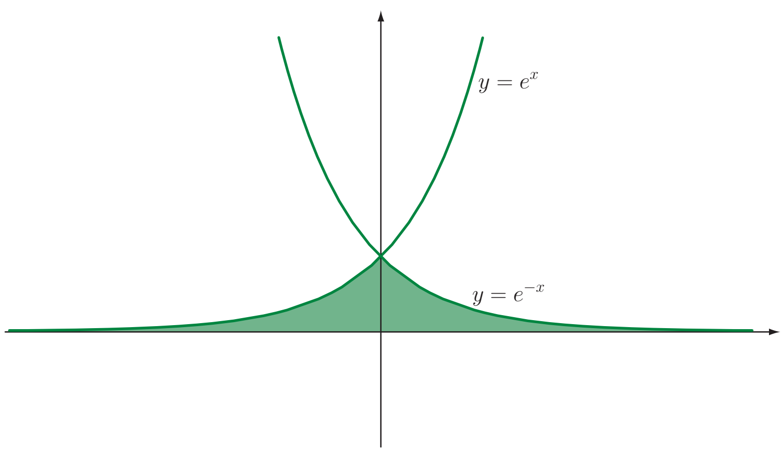
   (b) Même question pour
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\in[0,2\pi] \text{ et } \sin x\le y\le\cos x\right\}.$$

3. Représenter l'ensemble d'intégration et permuter les intégrales dans les cas suivants.
   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{-x/2} f(x,y)\,dy\right)dx$
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{-3x-4}^{0} f(x,y)\,dy\right)dx$
   (c) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy$

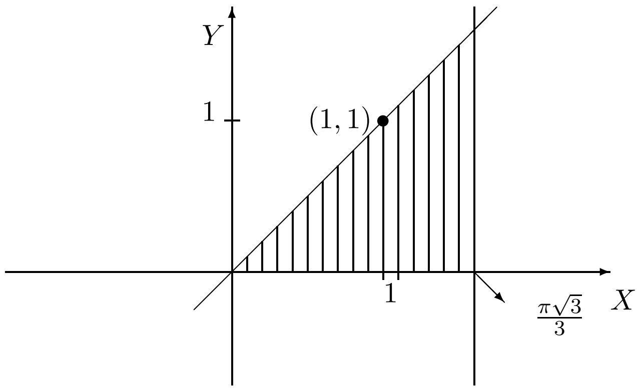
4. Calculer l'intégrale de la fonction f_j sur l'ensemble A_j correspondant.
   (a) $f_1(x,y)=y^2\sin(xy),\quad A_1=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$
   (b) $f_2(x,y)=\cos(x+y),\quad A_2=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]$
   (c) $f_3(x,y)=x+y,\quad A_3=\left\{(x,y)\ :\ 0\le y\le\inf\{x,\sqrt{1-x^2}\}\right\}$

5. On considère l'ensemble
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le\inf\{e^{-x},\ln(x+e)\}\right\}.$$
   Représenter graphiquement A et écrire l'intégrale
$$\iint_A f(x,y)\,dxdy$$
   sous forme de deux intégrales successives par rapport à x puis à y (resp. par rapport à y puis à x).

6. (a) Donner une description analytique de l'ensemble fermé représenté sur la figure suivante.
   Calculer l'intégrale de $f(x,y)=x+y$ sur cet ensemble.



(b) Donner une description analytique de l'ensemble fermé borné hachuré sur la figure suivante.
Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$ sur cet ensemble.



7. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer.
Dans chaque cas, représenter graphiquement l'ensemble d'intégration.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y} \, dy \right) dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x^2}}{x^2+y} \, dy \right) dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \left(\int_y^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2} \, dx \right) dy$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y} \, dy \right) dx$

8. Dans les deux cas ci-dessous, donner une représentation graphique de l'ensemble A_j dans un repère orthonormé et calculer l'intégrale de la fonction f_j sur cet ensemble (a et b désignent des réels strictement positifs).

(a) $f_1(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}, \ \ A_1 = \left\{(x, y) \ : \ x \geq 0, \ y \leq 0, \ x^2+y^2 \leq 4\right\}$

(b) $f_2(x, y) = x^3+y^3, \ \ A_2 = \left\{(x, y) \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

9. Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement 1 et 2 centrés à l'origine et l'axe X.
Calculer l'intégrale de $f(x, y) = 1 + 3x + 8y^2$ sur A.

10. Justifier l'existence de l'intégrale I et calculer sa valeur.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dy \right) dx$$

Suggestion. Ecrire I comme une intégrale double puis effectuer un changement de variables au moyen des relations $2x = u + v,\ 2y = u - v$.

11. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$$

Suggestion. Transformer $\frac{1}{x}$ en une intégrale en montrant que

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$$

puis permuter l'ordre d'intégration dans l'intégrale double obtenue.

12. Exercices résolus ou proposés aux pages 437-439 de EK.

13. **Applications du théorème des intégrales paramétriques**

(a) Soient un réel a et une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a

$$DF(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t)\, dt.$$

(b) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px}\, dx$$

pour tous réels $a,\ b$ et tout $p > 0$.

Remarque. Si p est complexe de partie réelle strictement positive, cette intégrale est en fait la transformée de Laplace (en p) unilatérale de la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}.$$

(c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x}\, dx \quad (a,\ b > 0).$$

(d) Soit
$$F(t)=\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\,dx, \quad t>-1.$$

- Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $]-1,+\infty[$.
- Calculer $F(0)$.
- Montrer que $DF(t)=\dfrac{1}{t+1}$.
- En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F.

1.2 SOLUTIONS

1.2.1 Exercices proposés dans la section (1.1.1)

1. (a) • Les domaines de définition et d'infinie dérivabilité de la fonction f sont les mêmes. Il s'agit de l'ensemble

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x>y \text{ et } x^2-y^2>1\} \ \cup \ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x<y \text{ et } x^2-y^2<1\}$$

c'est-à-dire de l'union des deux ensembles suivants :

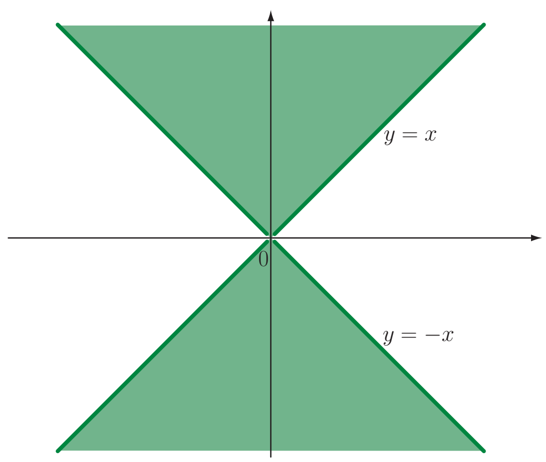
– l'ensemble des points du plan situés au-dessus de la première bissectrice (d'équation $x=y$) et "entre" les branches de l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $x^2-y^2=1$ (dont les asymptotes sont les droites d'équation $x=y$ et $x=-y$) ;

– l'ensemble des points du plan situés à droite de la branche de droite de cette même hyperbole.

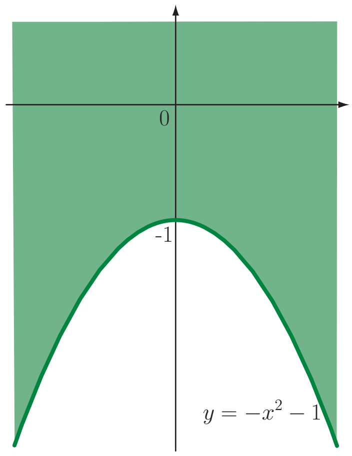
• La fonction g est définie dans

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left|\frac{x}{y}\right|\le 1\right\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le|y|,\ y\neq 0\}$$

et infiniment continûment dérivable dans $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<|y|\}$.



- La fonction h est définie dans $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq -(x^2+1)\}$ et infiniment continûment dérivable dans $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > -(x^2+1)\}$



(b) $$|x|D_xg(x,y)+|y|D_yg(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } xy\geq 0 \text{ (et } |x|<|y|) \\ \dfrac{-2x}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si } xy\leq 0 \text{ (et } |x|<|y|) \end{cases}$$

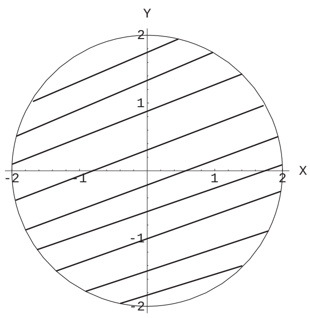
2. F est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$ et

$$F'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{1-x^2} & \text{si } x\in]-1,0[\\ \dfrac{2}{1-x^2} & \text{si } x\in]0,1[. \end{cases}$$

3. (a) La fonction est continûment dérivable dans

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 4>x^2+y^2\}$$

qui est la surface intérieure au cercle (circonférence) d'équation cartésienne $x^2+y^2=4$ (les points de cette circonférence n'étant pas compris dans l'ensemble).



(b) L'expression explicite de F est

$$\begin{aligned} F(t) &= \ln\left[16 - 4(t-1)^2 - 4(t+1)^2\right] \\ &= \ln(8 - 8t^2) \\ &= 3\ln 2 + \ln(1 - t^2) \end{aligned}$$

(c) La fonction F est dérivable dans $]-1,1[$ et, dans cet ensemble, on a

$$DF(t) = D\ln\left(1 - t^2\right) = \frac{-2t}{1-t^2}.$$

4. F est continûment dérivable sur $]-1,0[$ et

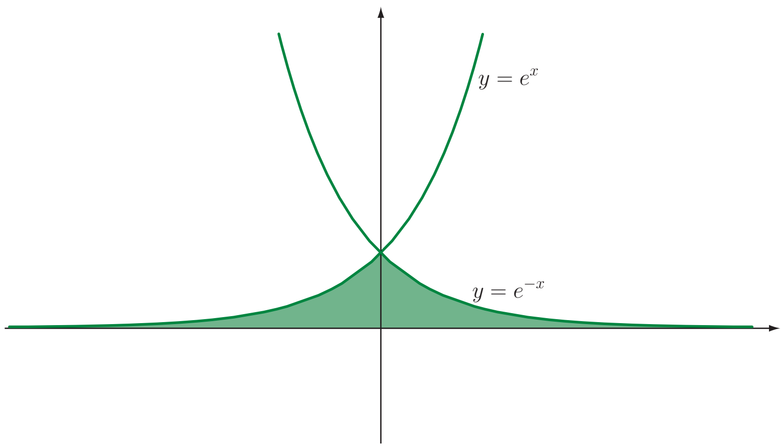
$$F'(t) = (2t-2)[D_x f]_{(t^2-2t, e^{-t}-1)} - e^{-t}[D_y f]_{(t^2-2t, e^{-t}-1)}.$$

5. Voir EK.

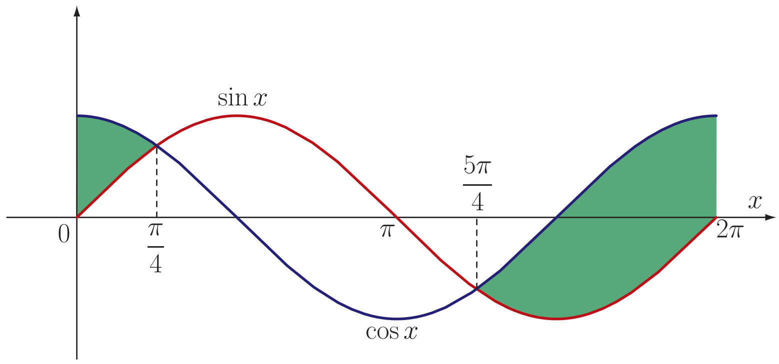
1.2.2 Exercices proposés dans la section (1.1.2)

1. (a) La fonction f_1 n'est pas intégrable sur $[-1,1]$.
   (b) La fonction f_2 est intégrable sur $[-1,1]$.
   (c) La fonction f_3 est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   (d) La fonction f_4 n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.
   (e) La fonction f_5 n'est pas intégrable sur $]0,1]$ mais l'est sur $[1,+\infty[$.
   (f) La fonction f_6 est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (g) La fonction f_7 est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   (h) La fonction f_8 est intégrable sur $]0,1]$.
   (i) La fonction f_9 n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

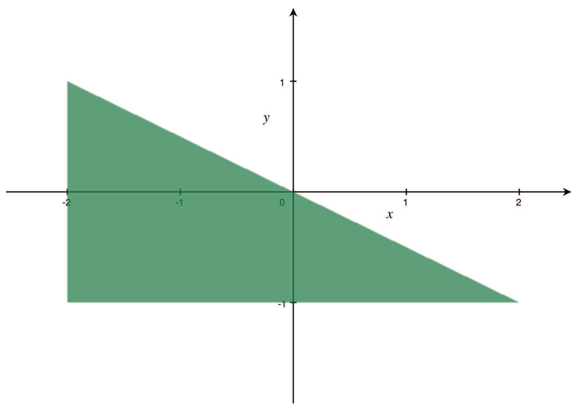
2. (a) L'aire de $\{(x,y)\ :\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \le y \le \inf\{e^{-x}, e^x\}\}$ vaut 2.



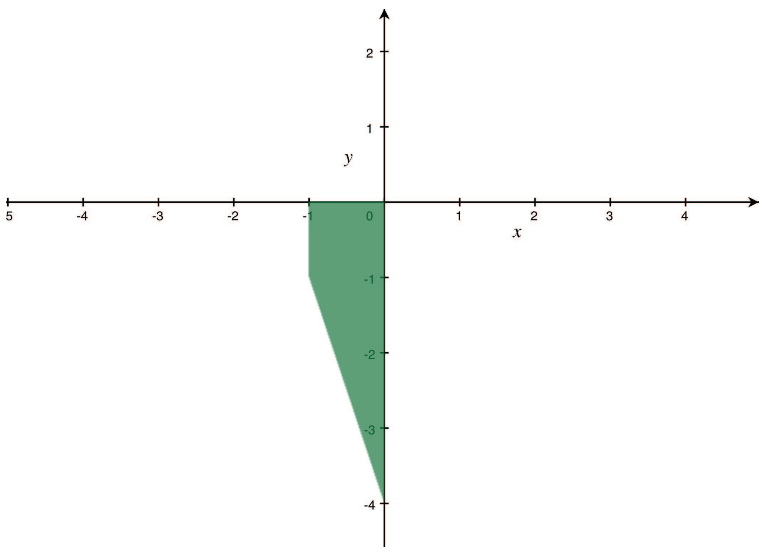
(b) L'aire de $\{(x,y) \ : \ x \in [0, 2\pi], \ y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos x\}$ vaut $2\sqrt{2}$.



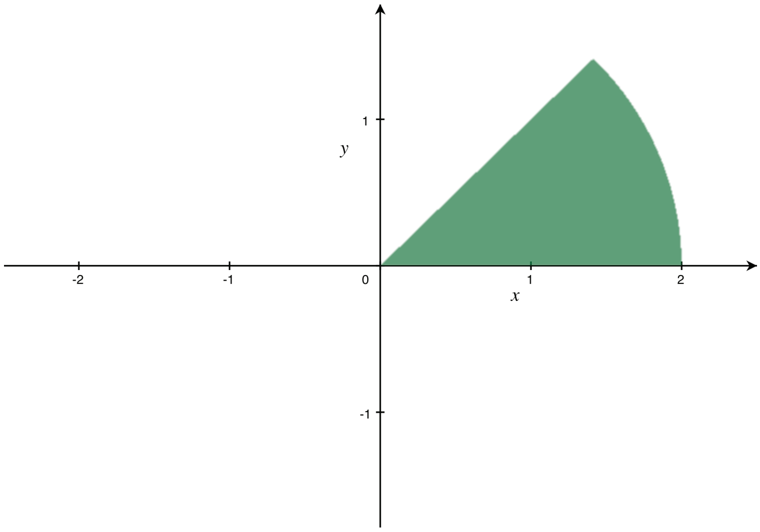
3. (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{-2y} f(x,y)\, dx \right) dy.$



(b) $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \left(\int_{-\frac{y+4}{3}}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy.$



(c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$



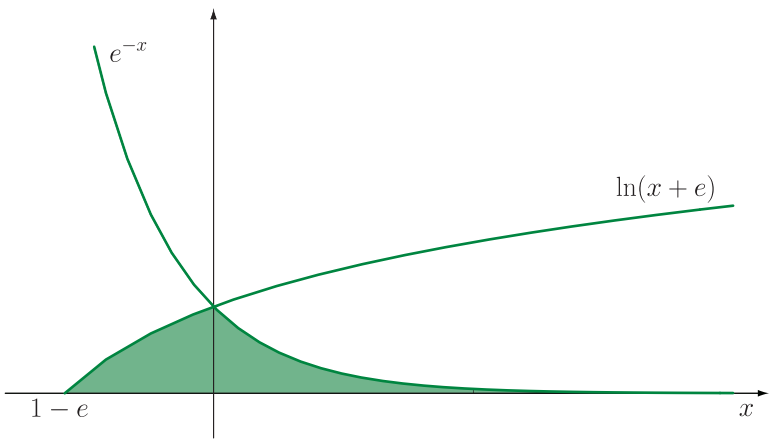
4. (a) L'intégrale vaut $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi^2} = \dfrac{\pi^2 - 4\pi + 8}{2\pi^2}$.

   (b) L'intégrale vaut -2.

   (c) L'intégrale vaut $\dfrac{1}{3}$.

5. • Dans le sens "x puis y" :
$$\int_0^1 \left(\int_{e^y - e}^{-\ln y} f(x,y)dx \right) dy.$$

   • Dans le sens "y puis x" :
$$\int_{1-e}^0 \left(\int_0^{\ln(x+e)} f(x,y)dy \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{e^{-x}} f(x,y)dy \right) dx.$$



6. (a) L'intégrale vaut $\frac{1}{2}$ et

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \in]0,1] \text{ et } x \in [\ln y, -\ln y]\right\} \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$$

ou $A = A_1 \cup A_2$ avec

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in]-\infty, 0] \text{ et } y \in [0, e^x]\right\}$$

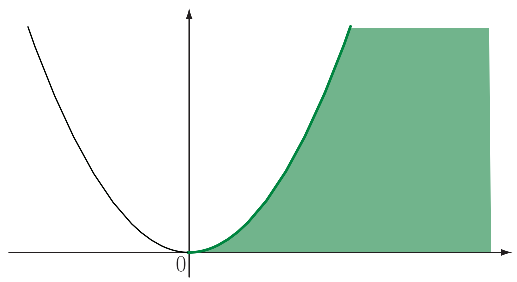
et

$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in]0, +\infty[\text{ et } y \in \left[0, e^{-x}\right]\right\}$$

(b) L'intégrale vaut $\dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\sin\left(\frac{\pi^2}{3}\right)}{2}$ et

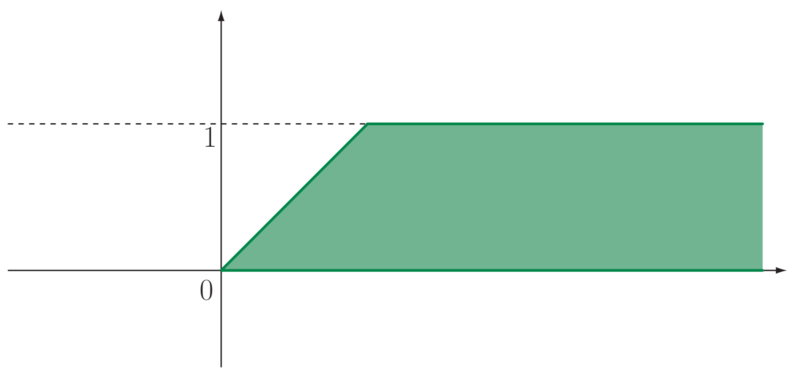
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \left[0, \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right], \ y \in [0,x]\right\}$$

7. (a) L'intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln 2$.

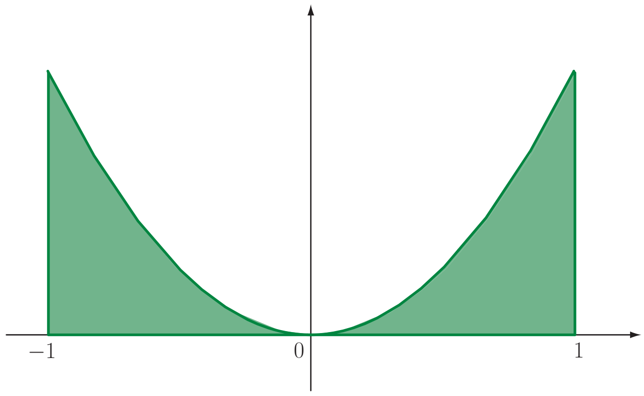


(b) L'intégrale vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\ln 2$.

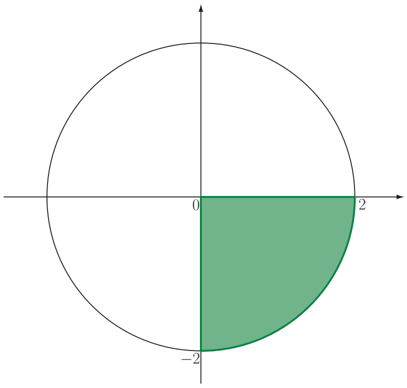
(c) L'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

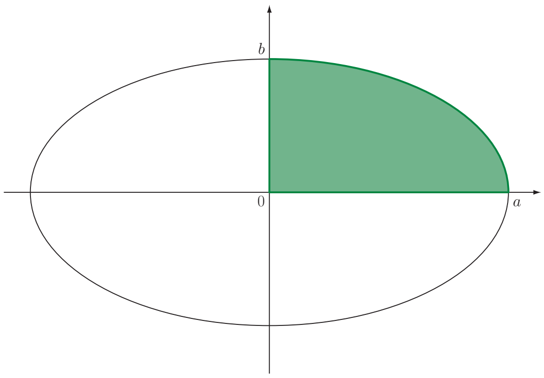


(d) L'intégrale vaut $2\ln 2 - 2$.



8. Les intégrales valent respectivement $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{2ab}{15}\left(a^3+b^3\right)$.





9. L'intégrale vaut $\dfrac{33\pi}{2}$.

10. L'intégrale vaut $\dfrac{e^2-1}{4e}$.

11. L'intégrale vaut $\ln 2$.

12. Voir EK.

13. (a) Il s'agit d'une application du théorème des intégrales paramétriques avec $A =]0,+\infty[$ comme ensemble d'intégration (variable notée t) et $\Lambda =]a,+\infty[$ comme ouvert de variation du paramètre (paramètre noté x).
Seule la majoration uniforme de la dérivée première n'est pas immédiate.

Suggestion. Si K est un compact inclus dans Λ, alors il existe $r > a$ tel que $K \subset [r,+\infty[$. Il s'ensuit que

$$|D_x(e^{-xt}f(t))| = te^{-xt}|f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|\ te^{-(r-a)t} \leq Ce^{-at}|f(t)| \quad \forall x \in K,\ t > 0.$$

(b) L'intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p^2+b^2}{p^2+a^2}\right)$.

(c) L'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

(d) Montrons que F est bien défini c'est-à-dire que $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{x^t-1}{\ln x}$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $t > -1$.

- La fonction $f(.,t)$ est continue sur $]0,1[$.
- Intégrabilité en 1^- : le théorème de l'Hospital montre que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x,t) = 1 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 1^-.
- Intégrabilité en 0^+ lorsque $t \geq 0$: on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+.
- Intégrabilité en 0^+ lorsque $-1 < t < 0$: on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-t} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+.

La seconde étape consiste alors à appliquer le théorème des intégrales paramétriques. Tout est direct sauf, peut-être, l'estimation uniforme de la dérivée.

Suggestion. On a $D_t f(x,t) = x^t$.

- Majoration lorsque $t \in [r,0]$ avec $-1 < r < 0$:

$$\sup_{t\in[r,0]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq x^r \in L^1(]0,1[)$$

- Majoration lorsque $t \in [0,R]$ avec $R > 0$:

$$\sup_{t\in[0,R]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq 1 \in L^1(]0,1[)$$

Les intégrales paramétriques donnent

$$DF(t) = \int_0^1 D_t f(t,x)\ dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}, \quad \forall\, t > -1$$

donc

$$F(t) = \ln(t+1) + constante, \quad \forall\, t > -1.$$

Comme $F(0) = 0$, on trouve $constante = 0$ et, finalement,

$$\int_0^1 f(t,x)dx = \ln(t+1), \quad \forall\, t > -1.$$

Chapitre 2

Analyse vectorielle

2.1 RAPPELS THEORIQUES

2.1.1 Notations

Vecteurs

- Chez EK, les vecteurs sont généralement représentés à l'aide d'une lettre minuscule écrite en caractère gras ($\mathbf{v}$).
  Si un vecteur est donné par ses composantes, celles-ci sont séparées par des virgules et entourées de crochets (les coordonnées de points sont entourées de parenthèses).
- Dans le présent cours [1], les vecteurs sont représentés à l'aide d'une lettre (minuscule) surmontée d'une flèche ($\vec{v}$).
  La convention de EK est adoptée pour différencier les composantes d'un vecteur des coordonnées d'un point.
  Par ailleurs, un vecteur est ici identifié au tableau de ses composantes dans une base donnée $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, ce qui conduit à l'abus d'écriture

$$\vec{v} = v_1\,\vec{e_1} + v_2\,\vec{e_2} + v_3\,\vec{e_3} = [v_1, v_2, v_3]$$

- Pour rappel, dans les cours d'*Analyse Mathématique* et d'*Algèbre* du premier bachelier, les vecteurs étaient représentés à l'aide de caractères gras ou, en écriture manuscrite (au tableau, par exemple), par une lettre (minuscule) soulignée ($\underline{v}$).

Produits scalaire et vectoriel

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$; leur *produit vectoriel* est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Intérieur et adhérence d'un ensemble

Si E est un ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathring{E}$ représente son intérieur et $\overline{E}$ son adhérence.

Notons encore que, dans le présent rappel, Ω désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$, n étant égal à 2 ou 3 selon le contexte.

1. et, de façon naturelle, chez plusieurs encadrants.

2.1.2 Fonctions scalaires, fonctions vectorielles et dérivation

Dans ce qui suit,

– une *fonction scalaire* est une application

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n = 1,\ 2 \text{ ou } 3).$$

– une *fonction vectorielle* est une application

$$\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n = 1,\ 2 \text{ ou } 3 \ \text{ et } \ m = 2 \text{ ou } 3).$$

Pour $m = 3$, on note $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$ où f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions scalaires.
On a

$$D\vec{f} = [Df_1, Df_2, Df_3]$$

et, si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ désignent deux fonctions vectorielles et α une fonction scalaire, toutes dérivables sur un même ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} D\left(\alpha\vec{f}\right) &= D\alpha\ \vec{f} + \alpha\ D\vec{f} \\ D\left(\vec{f} \bullet \vec{g}\right) &= D\vec{f} \bullet \vec{g} + \vec{f} \bullet D\vec{g} \\ D\left(\vec{f} \wedge \vec{g}\right) &= D\vec{f} \wedge \vec{g} + \vec{f} \wedge D\vec{g} \end{aligned}$$

2.1.3 Gradient, divergence et rotationnel

Soient $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Soient encore $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle (Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$).

1. Le *gradient* de α est la fonction vectorielle[2, 3]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\alpha) = \vec{\nabla}\alpha \ : \ (x, y, z) \in \Omega \ &\mapsto \ [D_x\alpha,\ D_y\alpha,\ D_z\alpha] \\ &= \ D_x\alpha\,\vec{e_1} + D_y\alpha\,\vec{e_2} + D_z\alpha\,\vec{e_3} \end{aligned}$$

2. La *divergence* de $\vec{f}$ est la fonction scalaire

$$\mathrm{div}\left(\vec{f}\right) \ : \ (x, y, z) \in \Omega \ \mapsto \ D_x f_1 + D_y f_2 + D_z f_3$$

Par abus de notation, on écrit $\mathrm{div}\left(\vec{f}\right) = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}$.

2. Dans le cadre de ce cours, la flèche symbolisant le caractère vectoriel des expressions $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, $\vec{\nabla}$ ou encore $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ sera régulièrement omise.

3. Dans les lignes qui suivent, la dépendance des diverses dérivées par rapport aux variables x, y et z n'est pas rappelée afin d'alléger le texte et, ce faisant, de le rendre plus lisible.

3. Le *rotationnel* de $\vec{f}$ est la fonction vectorielle

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) \ : \ (x,y,z)\in\Omega &\mapsto [D_y f_3 - D_z f_2,\, D_z f_1 - D_x f_3,\, D_x f_2 - D_y f_1)] \\ &= (D_y f_3 - D_z f_2)\ \vec{e_1} + (D_z f_1 - D_x f_3)\ \vec{e_2} + (D_x f_2 - D_y f_1)\ \vec{e_3}\end{aligned}$$

Par abus de notation, on écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{\nabla}\wedge\vec{f}$.

2.1.4 Relations entre le gradient, la divergence et le rotationnel

Rappelons qu'un ouvert Ω est *étoilé par rapport à* $x_0\in\Omega$ si, pour tout x dans Ω, le segment

$$\{(1-t)x_0 + tx : t\in[0,1]\}$$

est inclus dans Ω.

Un ouvert est dit *étoilé* s'il contient un point x_0 par rapport auquel il est étoilé.

1. Soit $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}$ une fonction scalaire. Il vient

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\alpha)\right] = \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\alpha = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega.$$

La réciproque est vraie si Ω est un ouvert étoilé :

Si $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ est une fonction vectorielle et si Ω est un ouvert étoilé, alors

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ \exists\,\alpha \ : \ \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ \vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\alpha) = \vec{\nabla}\alpha.$$

On dit dans ce cas que $\vec{f}$ *dérive du potentiel scalaire* α.

2. Soit $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}$ une fonction vectorielle. Il vient

$$\mathrm{div}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right)\right] = \vec{\nabla}\bullet(\vec{\nabla}\wedge\vec{f}) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

La réciproque est vraie si Ω est un ouvert étoilé :

Si $\vec{g} : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ est une fonction vectorielle et si Ω est un ouvert étoilé, alors

$$\mathrm{div}\,(\vec{g}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists\,\vec{f} \ : \ \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ \vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right).$$

On dit dans ce cas que $\vec{g}$ *dérive du potentiel vectoriel* $\vec{f}$.

3. Enfin, *toute fonction scalaire α de classe C_1 correspond à la divergence d'une fonction vectorielle $\vec{a}$ de classe C_2 :*

$$\forall\,\Omega\subset\mathbb{R}^3,\ \forall\,\alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R},\ \exists\,\vec{a} \ : \ \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3 \ \text{ tel que } \ \mathrm{div}\,(\vec{a}) = \alpha.$$

2.1.5 Courbes et intégrales associées

Une *courbe* $\mathcal{C}$ est un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes peuvent être décrites par une fonction vectorielle d'une variable réelle.

Cette fonction vectorielle est appelée *paramétrage* ou *chemin* et est la plupart du temps définie sur un intervalle (ou une union d'intervalles).

Nous nous limiterons ici au cas d'un intervalle fermé borné $I = [a, b]$.

$$\begin{array}{rcl} \underline{\text{Chemin}} & : & \vec{\gamma} \ : \ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ : \ t \mapsto \vec{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)] \\ \underline{\text{Courbe}} & : & \mathcal{C} = \{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \overrightarrow{OP}(t) = \vec{\gamma}(t), \ t \in I\} \end{array}$$

Sous les hypothèses adéquates [4]**,** on a les formules suivantes :

- *Vecteur tangent* (*unitaire*)

$$\vec{v}(P) = D_t\vec{\gamma}(t) \qquad \left(\vec{t}(P) = \frac{D_t\vec{\gamma}(t)}{\|D_t\vec{\gamma}(t)\|} \right)$$

- *Longueur d'un chemin*

$$L_{\vec{\gamma}} = \int_a^b \|D_t\vec{\gamma}(t)\| \ dt$$

- *Intégrale d'une fonction scalaire sur un chemin*

$$\int_{\vec{\gamma}} g \ ds = \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \ \|D_t\vec{\gamma}(t)\| \ dt$$

- *Intégrale curviligne d'une fonction vectorielle le long d'un chemin*

$$\int_{\vec{\gamma}} f_1 \ dx + f_2 \ dy + f_3 \ dz = \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \bullet D_t\vec{\gamma}(t) \ dt$$

2.1.6 Surfaces et intégrales associées

Une *surface* $\mathcal{S}$ est un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes peuvent être décrites par une fonction vectorielle de deux variables réelles.

Cette fonction est appelée *paramétrage* ou *couverture* si elle satisfait la définition ci-dessous.

Couverture : une *couverture* d'une surface $\mathcal{S}$ est la donnée d'un compact K de $\mathbb{R}^2$ et d'une fonction $\vec{\phi}$ de classe C_1 sur un ouvert contenant K telle que :

- ϕ est injective sur $\mathring{K}$ (rappelons que $\mathring{K}$ représente l'intérieur de K) ;
- $\exists\, \vec{\psi} \in C_1(\omega)$ avec $\vec{\phi}(\mathring{K}) \subset \omega$ et telle que $\vec{\psi}\left(\vec{\phi}(u,v)\right) = [u,v]$ pour tout $(u,v) \in \mathring{K}$. [5]

Surface : $\mathcal{S} = \{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \overrightarrow{OP}(t) = \vec{\phi}(u,v), \ (u,v) \in K\}$

4. Voir cours théorique.
5. En pratique, on vérifiera rarement cette deuxième condition car cette vérification sortirait du cadre du cours.

Sous les hypothèses adéquates[6]**,** on a les formules suivantes :

- *Vecteur normal* (*unitaire*)

$$\vec{N}(u,v) = \left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v) \qquad \left(\vec{n}(u,v) = \frac{\left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v)}{\left\|\left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v)\right\|} \right)$$

- *Aire d'une surface*

$$A_{\mathcal{S}} = \iint_K \left\|\left(D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\right)(u,v)\right\| \ du\ dv.$$

- *Intégrale de g sur $\vec{\phi}$*

$$\iint_{\vec{\phi}} g\ d\sigma = \iint_K g(\vec{\phi}(u,v))\ \|\vec{N}(u,v)\|\ du\ dv$$

- *Intégrales superficielles de $\vec{f}$ le long de $\vec{\phi}$*

$$\begin{aligned}
\iint_{\vec{\phi}} f_3\ dx \wedge dy &= \iint_K f_3\left(\vec{\phi}(u,v)\right) N_3(u,v)\ du\ dv \\
\iint_{\vec{\phi}} f_2\ dx \wedge dz &= \iint_K f_2\left(\vec{\phi}(u,v)\right) N_2(u,v)\ du\ dv \\
\iint_{\vec{\phi}} f_1\ dy \wedge dz &= \iint_K f_1\left(\vec{\phi}(u,v)\right) N_1(u,v)\ du\ dv
\end{aligned}$$

2.1.7 Intégrales remarquables

1. **Formule de Green dans le plan**

   Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le contour $\mathcal{C}$ est une union finie de courbes planes orientées "aire à gauche" et soit $\vec{f} = [f_1, f_2] : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^2$ tel que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$. On a

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1)\ dx\ dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1\ dx + f_2\ dy)$$

2. **Formule de Gauss ou théorème de la divergence**

   Soit V un compact de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière $\mathcal{S}$ est une union finie de surfaces orientables et soit $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3] : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^3$ tel que $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iint_V \operatorname{div}\left(\vec{f}\right)\ dx\ dy\ dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma,$$

   où $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure à la surface.

6. Voir cours théorique.

3. **Formule de Stokes**

   Soit $\mathcal{S}^+$ une union finie de surfaces régulières orientées dont la frontière est la courbe fermée $\mathcal{C}^+$ composée d'une union finie de courbes régulières et orientées de manière à respecter la règle du tire-bouchon par rapport à l'orientation de $\mathcal{S}^+$. Soit également $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$: $\Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{S} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

   $$\iint_{\mathcal{S}^+} \vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) \bullet \vec{n}\ d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \bullet \vec{t}\ ds = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1\ dx + f_2\ dy + f_3\ dz,$$

   où $\vec{n}$ est la normale unitaire à $\mathcal{S}^+$ et $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}^+$.

2.2 EXERCICES PROPOSES

2.2.1 Notions fondamentales

1. On fixe une base orthonormée de l'espace notée $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ et on donne les vecteurs

   $$\vec{u} = 3\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

   (a) Dans la base donnée, déterminer les composantes de $2\vec{u} - (\vec{u} \wedge \vec{w})$ et de $(\vec{u} \bullet \vec{v})\, \vec{w}$.

   (b) Déterminer la norme de $\vec{u} + 3\vec{v}$.

   (c) Déterminer la nature des expressions suivantes (si elles ont un sens)

   $$\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}, \quad \vec{v} \wedge (\vec{u} \bullet \vec{v})\, \vec{u}, \quad \vec{u} \bullet \vec{w}\ \vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w})\, \vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w}) \bullet \vec{u}$$

   (d) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ou dépendants ? Pourquoi ?

   (e) Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont linéairement indépendants, déterminer les composantes de $\vec{e}_2$ dans la base qu'ils forment.

2. On fixe une base orthonormée de l'espace et les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{v}$ respectivement de composantes $[1, 2, 2]$ et $[1, -1, 0]$.

   (a) Donner une représentation du vecteur $\vec{x}$.

   (b) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$.

   (c) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x}$ sur le plan déterminé par les vecteurs de composantes $[1, 1, 0]$ et $[0, 0, 1]$.

2.2.2 Manipulations algébriques, géométriques et dérivation

1. Soient $\vec{F}$, $\vec{G}$ des fonctions vectorielles en la variable réelle u et soit ϕ une fonction scalaire de la variable réelle u. On suppose que ces fonctions sont dérivables dans le même intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Dans cet intervalle,

   (a) établir la formule
   $$D_u\left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right) = \left(D_u\vec{F}\right) \bullet \vec{G} + \vec{F} \bullet \left(D_u\vec{G}\right)$$
   et en déduire qu'un vecteur de norme constante est orthogonal à sa dérivée ;

   (b) établir la formule
   $$D_u\left(\phi\,\vec{F}\right) = \phi\ D_u\vec{F} + (D_u\phi)\ \vec{F}.$$

2. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On définit la fonction vectorielle $\vec{R}$ par
   $$\vec{R}(t) = \cos t\ \vec{e}_1 + \sin t\ \vec{e}_2 + t\ \vec{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Déterminer
   $$D_t\vec{R}, \quad D_t^2\vec{R}, \quad \left\|D_t\vec{R}\right\|, \quad D_t\vec{R} \wedge D_t^2\vec{R}.$$

   (b) Esquisser la courbe décrite par l'extrémité P du vecteur lié
   $$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{R}(t), \quad t \geq 0$$
   et représenter le vecteur tangent à la courbe aux points de paramètre $t = \dfrac{\pi}{4}$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$.

3. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle
   $$\vec{F}(u, v) = u \sin v\ \vec{e}_1 + v \cos u\ \vec{e}_2 + u\ \vec{e}_3, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$
   Déterminer l'expression explicite des fonctions suivantes (à valeurs scalaires ou vectorielles)
   $$D_u\vec{F} \bullet D_v\vec{F}, \quad D_u\vec{F} \wedge D_v\vec{F}.$$

4. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. Une particule se déplace de telle sorte que, à l'instant t, son vecteur position $\vec{r}$ est donné par
   $$\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\ \vec{e}_1 + \sin(\omega t)\ \vec{e}_2$$
   où $t \in \mathbb{R}$ et ω désigne une constante.

   (a) Montrer que, à tout instant, la vitesse $\vec{v}$ de la particule est orthogonale à son vecteur position.

(b) Montrer que, à tout instant, l'accélération de la particule est dirigée vers l'origine et a une norme proportionnelle à sa distance à l'origine.

(c) Montrer que la fonction vectorielle $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant.

(d) Interpréter géométriquement les résultats.

5. On suppose que la température est donnée en tout point du plan par la fonction scalaire $T(x, y)$ définie ci-dessous.

   (a) $T(x, y) = xy$

   (b) $T(x, y) = x^2 - y^2$

   (c) $T(x, y) = x^2 - 4x + y^2$

   (d) $T(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$

   On demande de
   - déterminer les isothermes (ce sont des courbes du plan), en préciser la nature et en donner une représentation paramétrique ;
   - déterminer le gradient de la fonction ;
   - donner une représentation graphique des isothermes et de quelques gradients.

6. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2)$ les vecteurs d'une base orthonormée du plan. Esquisser une représentation graphique de la fonction vectorielle $\vec{v}(x, y) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

7. On suppose que $\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{e}_1 + y(t)\ \vec{e}_2$ est le vecteur position d'une particule à l'instant t et que la vitesse de cette particule est donnée par la fonction $\vec{v}$ ci-dessous. [7]

   (a) $\vec{v}(x, y) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$

   (b) $\vec{v}(x, y) = y\ \vec{e}_1 + x\ \vec{e}_2$

   (c) $\vec{v}(x, y) = y\ \vec{e}_1 - x\ \vec{e}_2$

   (d) $\vec{v}(x, y) = x\ \vec{e}_1 + y\ \vec{e}_2$

   (e) $\vec{v}(x, y) = x\ \vec{e}_1 + 2y\ \vec{e}_2$

   (f) $\vec{v}(x, y) = 4y\ \vec{e}_1 - x\ \vec{e}_2$

   On demande de
   - déterminer les courbes que la particule décrit au cours du temps ;
   - représenter graphiquement (sur le même dessin) la fonction $\vec{v}$ et ces courbes (en fonction de conditions initiales).

7. $\vec{v}(x, y)$ dépend du temps "au travers de" x et y et

$$\vec{v}(t) = D_t\vec{r}(t) = x'(t)\ \vec{e}_1 + y'(t)\ \vec{e}_2$$

2.2.3 Gradient, divergence, rotationnel

1. On donne les fonctions vectorielle et scalaire suivantes
$$\vec{r}(x, y, z) = [x, y, z], \quad r(x, y, z) = \|\vec{r}(x, y, z)\|$$
et le vecteur constant $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$. Déterminer
   (a) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{r}$
   (b) le gradient de la fonction scalaire $\dfrac{1}{r}$
   (c) le gradient de la fonction scalaire $\vec{r} \bullet \vec{r}$
   (d) le gradient de la divergence des fonctions vectorielles $\vec{r}$ et $r\,\vec{r}$
   (e) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{a} \wedge \vec{r}$
   (f) le gradient de la fonction scalaire $\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|$

2. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. Déterminer
   (a) le gradient de la fonction scalaire f définie par $f(x, y) = xye^y$
   (b) la divergence de la fonction vectorielle $\vec{C}$ définie par
$$\vec{C}(x, y, z) = \arctan(x^2 + y^2)\ \vec{e}_1 + z\ \vec{e}_2$$
   (c) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{D}$ définie par
$$\vec{D}(x, y, z) = y^2\ \vec{e}_1 + xz\ \vec{e}_2 + xyz\ \vec{e}_3$$

3. Sur les exemples suivants, vérifier que le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire régulière est nul et que la divergence du rotationnel d'une fonction vectorielle régulière est nul.
   (a) $H(x, y, z) = \cos(xyz)$
   (b) $\vec{f}(x, y, z) = [x^2y,\ x^2z^4,\ e^{xyz}]$

4. Les opérations suivantes ont-elles un sens ?
Si oui, définissent-elles une fonction scalaire ou une fonction vectorielle ?
   (a) Gradient de la divergence d'une fonction vectorielle
   (b) Gradient de la divergence d'une fonction scalaire
   (c) Divergence du gradient d'une fonction scalaire
   (d) Divergence du gradient d'une fonction vectorielle
   (e) Divergence de la divergence d'une fonction scalaire
   (f) Rotationnel de la divergence d'une fonction vectorielle

5. Déterminer la dérivée dans la direction $\vec{h}$ de la fonction scalaire f au point P si
$$f(x,y,z) = xyz, \quad P(-1,1,3), \quad \vec{h} = [1,-2,2].$$

6. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur est transmise dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite.
   Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ - et, plus particulièrement, au point P donné - dans le cas où le champ est représenté par les fonctions scalaires ci-dessous.
   (a) $T(x,y) = x^2 - y^2, \quad P(2,1)$
   (b) $T(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad P(2,2)$
   Esquisser les isothermes et les vecteurs unitaires correspondant à la direction et au sens obtenus au point P.

7. Reprendre les exemples de fonctions $\vec{v}$ de l'exercice 7 de la section (2.2.2).
   Supposons que la fonction $\vec{v}$ représente la vitesse du courant d'un fluide et que l'on examine ce qui se passe dans un carré centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes.
   - Si $D_t x = v_1$ et $D_t y = v_2$, déterminer les courbes $(x(t), y(t))$ le long desquelles les particules se déplacent (*i.e.* intégrer $\vec{v}$).
   - Peut-on prévoir le signe de la divergence de $\vec{v}$ en un point du bord du carré ?
   - Déterminer explicitement la divergence de $\vec{v}$.
   - Déterminer aussi le rotationnel de $\vec{v}$ (avec 0 en guise de troisième composante du champ).

8. Montrer que l'opérateur
$$\big[\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}) - \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot})\big]\,. = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet .) \; - \; \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge .)$$
   qui s'applique à une fonction vectorielle pour donner une fonction vectorielle est tel que
$$\big[\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}) - \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot})\big]\,\vec{f} = [\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3] \qquad \text{où} \qquad \vec{f} = [f_1, f_2, f_3].$$

9. Les fonctions vectorielles $\vec{E}(x,y,z,t)$ et $\vec{H}(x,y,z,t)$ qui représentent respectivement les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$ vérifient les équations de Maxwell
$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} \bullet \vec{E} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{H} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} & = & -\frac{1}{c}\, D_t \vec{H} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} & = & \frac{1}{c}\, D_t \vec{E} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\, \vec{E} & = & 0 \\ \mathrm{div}\, \vec{H} & = & 0 \\ \mathrm{rot}\, \vec{E} & = & -\frac{1}{c}\, D_t \vec{H} \\ \mathrm{rot}\, \vec{H} & = & \frac{1}{c}\, D_t \vec{E} \end{array}\right.$$

Montrer que ces fonctions (en fait chaque composante de chacune d'elles) vérifient également l'équation des ondes, à savoir

$$\left(\frac{1}{c^2}D_t^2 - \Delta\right)\vec{u} = \vec{0}.$$

10. Sous certaines hypothèses, on sait qu'une fonction vectorielle est irrotationnelle [8] si et seulement si elle dérive d'un potentiel scalaire [9] et qu'une fonction vectorielle est indivergentielle [10] si et seulement si elle dérive d'un potentiel vectoriel [11].

    (a) Montrer que la fonction vectorielle

    $$\vec{f}(x,y,z) = [x, 4y, -z]$$

    admet un potentiel scalaire et calculer celui-ci.
    Est-il unique ?

    (b) Montrer que la fonction vectorielle

    $$\vec{f}(x,y,z) = \frac{[x,y,z]}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

    admet un potentiel scalaire dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ qui s'annule à l'infini et calculer celui-ci.

    (c) Soit $\vec{a}$ un vecteur constant et soit $\vec{r}$ la fonction vectorielle $[x,y,z]$.
    Montrer que la fonction vectorielle $\vec{a} \wedge \vec{r}$ admet un potentiel vectoriel et le calculer.

2.2.4 Courbes et surfaces

1. Voici plusieurs paramétrages de courbes planes

$$[t - \sin t,\ 1 - \cos t]\,,\quad t \in [0, 4\pi]$$

$$\left[\sqrt{\cos(2t)}\cos t,\ \sqrt{\cos(2t)}\sin t\right],\quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

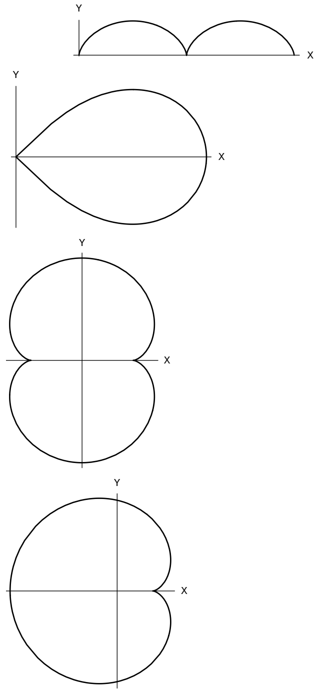
$$[2\cos t - \cos(2t),\ 2\sin t - \sin(2t)]\,,\quad t \in [0, 2\pi]$$

$$[3\cos t - \cos(3t),\ 3\sin t - \sin(3t)]\,,\quad t \in [0, 2\pi]$$

et les représentations de ces courbes, *proposées dans le désordre.*

---

8. *i.e.* son rotationnel est nul
9. *i.e.* elle est égale au gradient d'un potentiel scalaire
10. *i.e.* sa divergence est nulle
11. *i.e.* elle est égale au rotationnel d'un potentiel vectoriel



(a) Associer chaque paramétrage à sa représentation.

(b) En tout point de chacune des courbes, déterminer un vecteur tangent et un vecteur normal.

2. (a) Déterminer un vecteur normal à la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ au point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

   Donner une représentation de la courbe et du vecteur.

   (b) Déterminer un vecteur normal et un vecteur tangent à la courbe plane d'équation cartésienne $4x^2 + y^2 - 2y = 15$ au point de coordonnées $(\sqrt{3}, 3)$.

   Donner une représentation de la courbe et des vecteurs.

3. (a) Déterminer un vecteur normal à la surface d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ au point P de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ et en donner une représentation graphique.

   (b) Même question pour la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et le point P de coordonnées $(3, 4, 25)$.

   (c) Déterminer une représentation paramétrique des surfaces considérées en (a) et (b).

4. On donne les équations paramétriques suivantes (*i.e.* des paramétrages) de courbes du plan X, Y et d'une surface (point (f)).
   Esquisser chacune d'entre elles et en donner une équation cartésienne.

(a) $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = -3 + 4t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 4\sin t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1 - t^2} \end{array}\right. \quad t \in [-1, 1]$

(e) $\left\{\begin{array}{l} x(t) = -1 + \frac{3}{2}\sin t \\ y(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos t \end{array}\right. \quad t \in [-\pi, 3\pi]$

(f) $\left\{\begin{array}{l} x(t,s) = \cos t\ \sin s \\ y(t,s) = 2\ \sin t\ \sin s \\ z(t,s) = 3\ \cos s \end{array}\right. \quad t, s \in \mathbb{R}$

5. On donne les équations cartésiennes suivantes de courbes et de surfaces.
   Esquisser chacune d'entre elles et en donner un paramétrage (*pour le point* (a), *considérer le cas du plan puis le cas de l'espace*).

   (a) $x^2 + 4y^2 = 1$

   (b) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

   (c) $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$

6. (a) Reprendre les courbes (ou arcs) des deux exercices précédents.
   Choisir une orientation et déterminer le vecteur tangent unitaire en chacun des points de la courbe orientée.

   (b) Reprendre les surfaces des deux exercices précédents.
   Choisir une orientation et déterminer le vecteur normal unitaire en chacun des points de la surface orientée.
   Déterminer aussi deux vecteurs linéairement indépendants du plan tangent correspondant.

7. Déterminer une représentation paramétrique des courbes suivantes ; spécifier la nature des deux dernières.

   (a) Segment de droite joignant les points de coordonnées $(5, 1, 2)$ et $(11, 3, 0)$

   (b) Courbe d'équation cartésienne $\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = y \end{array}\right.$

   (c) Courbe d'équation cartésienne $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = y \end{array}\right.$

8. Esquisser quelques courbes de niveau de la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$ pour

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

   (b) $f(x, y) = (x - 2)\ (y + 2)$

9. Exercices 1-10 et 12-19 de la section 10.5 dans EK (manipulation de paramétrages et d'équations cartésiennes standards).

2.2.5 Courbes, surfaces et intégration

1. On considère les courbes $\mathcal{C}$ qui relient les points A et B respectivement de coordonnées $(0, 0, 0)$ et $(2, 2, 2)$. Montrer que

$$\int_{\mathcal{C}} (2xdx + 2ydy + 4zdz)$$

   ne dépend pas de $\mathcal{C}$ et calculer la valeur de cette intégrale.

2. On considère les courbes fermées $\mathcal{C}$ ne passant pas par l'origine. L'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$$

   dépend-elle de $\mathcal{C}$? Pourquoi ?

   Suggestion.
   - Intégrer sur le cercle unité centré à l'origine ; procéder par calcul direct.
   - Intégrer sur un autre cercle de rayon 1 qui "ne tourne pas autour de l'origine" ; procéder par calcul direct ou se servir du fait que

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} = D_x f \quad \text{et} \quad \frac{x}{x^2 + y^2} = D_y f \quad \text{avec} \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

   - Pour anticiper les résultats relatifs aux fonctions holomorphes, intégrer aussi sur le carré centré à l'origine, de côtés parallèles aux axes et de longueur 2 ; calcul direct.

3. Déterminer la longueur des courbes ou l'aire des surfaces données ci-dessous (esquisser courbes et surfaces).

   (a) Longueur de l'astroïde : $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 1 \ \ (a, b > 0)$

   (b) Longueur de l'épicycloïde à deux rebroussements, de paramétrage

$$[3\cos t - \cos(3t),\ 3\sin t - \sin(3t)]\,, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   (c) Aire de la surface latérale d'un cône.

   (d) Longueur de l'arcade de cycloïde de représentation paramétrique

$$[t - \sin t,\ 1 - \cos t]\,, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   et aire de la surface déterminée par cette courbe et l'axe X.

(e) Surface déterminée par la cardioïde de représentation paramétrique

$$[2\cos t - \cos(2t),\ 2\sin t - \sin(2t)]\,,\quad t \in [0, 2\pi]$$

4. Calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ où $\mathcal{C}$ est l'arcade de cycloïde de représentation paramétrique

$$[u - \sin u,\ 1 - \cos u]\,,\quad u \in [0, 2\pi]$$

(b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \sqrt{2y^2 + z^2}\, ds$ où $\mathcal{C}$ est le cercle

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = y\}$$

(c) $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x^2 z\, d\sigma$ où $\mathcal{S}$ est le bord du compact de l'espace défini par les relations

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad z \in [0, 1]$$

5. (a) Vérifier la formule de Green pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y) = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$ et la surface

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \leq y \leq 2 - x^2\right\}$$

Représenter R.

(b) Même question pour $\vec{f}(x, y) = [2x, -y]$ et la surface bornée du plan délimitée, au-dessus de l'axe X, par le cercle centré à l'origine et de rayon 1 et les droites d'équation respective $x = y$ et $x = -y$.

(c) Calculer l'intégrale suivante en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\mathcal{C}} -x^2 y dx + x y^2 dy$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle centré à l'origine et de rayon R (on considère l'orientation "aire à gauche").

6. (a) Vérifier le théorème de la divergence avec les données suivantes : $\vec{f}(x, y, z) = [4x, 3z, 5y]$ et $\mathcal{S}$ est la surface du cône (portion de cône)

$$\left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\right\}$$

(b) Même question pour la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [x^2 + y^2, xy, z^2 + 1]$ et le compact V du premier octant limité par le plan $z = 2y$ et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 9$.

7. (a) Vérifier la formule de Stokes dans le cas de la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [y^2, x^2, -x + z]$ et du triangle de sommets de coordonnées $(0, 0, 1), (1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$.

(b) Même question pour la fonction $\vec{f}(x,y,z) = [x^2y, 0, xyz]$ et la surface composée de la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ limitée par les plans $z = 0$ et $z = 2$ et l'ensemble

$$\left\{(x,y,2) : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

8. (a) Montrer que la formule de Green dans le plan peut se déduire de la formule de Stokes.
Suggestion. Poser $f_3 = 0$.

(b) Montrer que la formule de Green dans le plan peut se déduire de la formule de la divergence.
Suggestion. Poser $f_3 = 0$ et définir un volume "parallèle à l'axe Z" à partir de K dans le plan.

9. On donne les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par

$$f_1(x,y,z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x,y,z) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x,y,z) = 0$$

et la fonction vectorielle $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$.

(a) Déterminer le rotationnel de $\vec{f}$ ainsi que $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \bullet \vec{v}\, ds$
($\vec{v}$ désigne le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}$, cercle de rayon 1 centré à l'origine).

(b) La formule de Stokes est-elle correcte dans ce cas ? Pourquoi ?

2.3 SOLUTIONS

2.3.1 Exercices proposés dans la section (2.2.1)

1. (a) $2\vec{u} - (\vec{u} \wedge \vec{w})$ a pour composantes $\left[10, -12, \frac{13}{2}\right]$
$(\vec{u} \bullet \vec{v})\, \vec{w}$ a pour composantes $[1, 1, -2]$

(b) $\|\vec{u} + 3\vec{v}\| = \frac{\sqrt{341}}{2}$

(c) $\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}$ n'a pas de sens.
$\vec{v} \wedge (\vec{u} \bullet \vec{v})\, \vec{u}$ est un vecteur.
$\vec{u} \bullet \vec{w}\, \vec{u}$ est un vecteur.
$(\vec{u} \wedge \vec{w})\, \vec{u}$ n'a pas de sens.
$(\vec{u} \wedge \vec{w}) \bullet \vec{u}$ est un scalaire.

(d) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants car

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

(e) $\vec{e_2} = \dfrac{6}{23}\,\vec{u} - \dfrac{22}{23}\,\vec{v} + \dfrac{26}{23}\,\vec{w}$

2. (a) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

   (b) Les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$ sont $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right]$.

   (c) Les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x}$ sur le plan déterminé par les vecteurs de composantes $[1,1,0]$ et $[0,0,1]$ sont, quant à elles, $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 2\right]$.

2.3.2 Exercices proposés dans la section (2.2.2)

1. -

2. (a) $D_t\vec{R}(t) = -\sin t\,\vec{e_1} + \cos t\,\vec{e_2} + \vec{e_3}$

   $D_t^2\vec{R}(t) = -\cos t\,\vec{e_1} - \sin t\,\vec{e_2}$

   $\left\|D_t\vec{R}(t)\right\| = \sqrt{2}$

   $D_t\vec{R} \wedge D_t^2\,\vec{R} = \sin t\,\vec{e_1} - \cos t\,\vec{e_2} + \vec{e_3}$

   (b) -

3. $D_u\vec{F} \bullet D_v\vec{F} = u \sin v \cos v - v \sin u \cos u$

   $D_u\vec{F} \wedge D_v\vec{F} = -\cos u\,\vec{e_1} + u\cos v\,\vec{e_2} + (\sin v \cos u + uv \sin u \cos v)\,\vec{e_3}$

4. (a) $\vec{v}(t) = D_t\vec{r}(t) = \omega\,[-\sin(\omega t)\,\vec{e}_1 + \cos(\omega t)\,\vec{e}_2]$ de sorte que $\vec{v}(t) \bullet \vec{r}(t) = 0$

   (b) $\vec{a}(t) = D_t\vec{v}(t) = D_t^2\vec{r}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)$ de sorte que $\left\|D^2\vec{r}(t)\right\| = \omega^2\,\|\vec{r}(t)\|$

   (c) $\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t) = \omega\vec{e_3}$

   (d) -

5. (a) Les isothermes sont des hyperboles et $\operatorname{grad} T(x,y) = y\,\vec{e_1} + x\,\vec{e_2}$

   (b) Les isothermes sont des hyperboles et $\operatorname{grad} T(x,y) = 2x\,\vec{e_1} - 2y\,\vec{e_2}$

   (c) Les isothermes sont des cercles et $\operatorname{grad} T(x,y) = (2x-4)\;\vec{e_1} + 2y\,\vec{e_2}$

   (d) Les isothermes sont des ellipses et $\operatorname{grad} T(x,y) = 2x\,\vec{e_1} + \frac{y}{2}\,\vec{e_2}$

6. -

7. (a) La trajectoire a pour équation $y = -x + C$, la constante C dépendant des conditions initiales du mouvement.

(b) La trajectoire a pour équation $x^2 - y^2 = C$

(c) La trajectoire a pour équation $x^2 + y^2 = C$

(d) La trajectoire a pour équation $y = Cx$

(e) La trajectoire a pour équation $y = Cx^2$

(f) La trajectoire a pour équation $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = C$

2.3.3 Exercices proposés dans la section (2.2.3)

1. (a) $\text{rot}\,(\vec{r}) = \vec{0}$

   (b) $\text{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

   (c) $\text{grad}\,(\vec{r} \bullet \vec{r}) = 2\vec{r}$

   (d) $\text{grad}\,[\text{div}\,(\vec{r})] = \vec{0}$ et $\text{grad}\,[\text{div}\,(r\,\vec{r})] = 4\,\dfrac{\vec{r}}{r}$

   (e) $\text{rot}\,(\vec{a} \wedge \vec{r}) = 2\vec{a}$

   (f) $\text{grad}\,(\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|) = \dfrac{(\vec{a} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{a}}{\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|}$

2. (a) $\text{grad}\,(f) = ye^y\,\vec{e}_1 + x(1+y)e^y\,\vec{e}_2$

   (b) $\text{div}\left(\vec{C}\right) = \dfrac{2x}{1 + (x^2+y^2)^2}$

   (c) $\text{rot}\left(\vec{D}\right) = x(z-1)\,\vec{e}_1 - yz\,\vec{e}_2 + (z-2y)\,\vec{e}_3$

3. -

4. (a) L'opération a du sens et définit un vecteur.

   (b) L'opération n'a pas de sens.

   (c) L'opération a du sens et définit un scalaire.

   (d) L'opération n'a pas de sens.

   (e) L'opération n'a pas de sens.

   (f) L'opération n'a pas de sens.

5. $[\text{grad}\,(f)]\,(P) \bullet \dfrac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \dfrac{7}{3}$

6. -

7. -

8. -

9. -

10. (a) $\vec{f}(x,y,z) = \text{grad}\left[\frac{x^2}{2} + 2y^2 - \frac{z^2}{2} + C\right]$ où C désigne un scalaire quelconque.

    (b) $\vec{f}(x,y,z) = \text{grad}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

    (c) $\vec{a} \wedge \vec{r} = \text{rot}\left[\frac{(\vec{a} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{a}}{3} + \text{grad}\,(f)\right]$
    où f désigne une fonction scalaire régulière quelconque.

2.3.4 Exercices proposés dans la section (2.2.4)

1. (a) Le premier paramétrage correspond à la première courbe ; il s'agit de deux arcades de cycloïde.

    Le deuxième paramétrage correspond à la deuxième courbe ; il s'agit d'une boucle de lemniscate.

    Le troisième paramétrage correspond à la quatrième courbe ; il s'agit d'une épicycloïde (cardioïde).

    Le quatrième paramétrage correspond à la troisième courbe ; il s'agit d'une épicycloïde (néphroïde).

    (b) - **Première courbe**

    Courbe constituée de deux arcs simples réguliers correspondant aux intervalles $]0, 2\pi[$ et $]2\pi, 4\pi[$ et des points correspondant aux paramètres 0, 2π et 4π (extrémités des arcs).
    Vecteur tangent : $[1 - \cos t, \sin t] = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ \left[\sin\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]$
    Norme de ce vecteur : $2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$
    Vecteur tangent unitaire : $\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]$ pour $t \in]0, 2\pi[$, $-\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]$ pour $t \in]2\pi, 4\pi[$ et, aux extrémités des arcs, $[0,1]$, $[0,-1]$, $[0,1]$ et $[0,-1]$.
    Vecteur normal $\vec{n}$ tel que $\vec{t} = t_1\,\vec{e}_1 + t_2\,\vec{e}_2$, $\vec{n}$ soit orienté comme la base : $\vec{n} = -t_2\,\vec{e}_1 + t_1\,\vec{e}_2$.

    - **Deuxième courbe**

    Courbe fermée constituée d'un arc simple régulier correspondant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et du point correspondant aux paramètres $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ (point de coordonnées $(0,0)$).

Vecteur tangent : $\dfrac{1}{\sqrt{\cos(2t)}}\,[-\sin(3t),\,\cos(3t)]$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

Norme de ce vecteur : $\dfrac{1}{\sqrt{\cos(2t)}}$

Vecteur tangent unitaire : $[-\sin(3t),\,\cos(3t)]$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et, à l'origine, $[1,-1]$ et $[-1,-1]$.

Vecteur normal $\vec{n}$ tel que $\vec{t} = t_1\,\vec{e}_1 + t_2\,\vec{e}_2$, $\vec{n}$ soit orienté comme la base : $\vec{n} = -t_2\,\vec{e}_1 + t_1\,\vec{e}_2$.

- **Troisième courbe**

  Courbe fermée constituée de deux arcs simples réguliers correspondant aux intervalles $]0,\pi[$ et $]\pi,2\pi[$ et des points correspondant aux paramètres 0, π et 2π (extrémités des arcs).

  Vecteur tangent : $3\,[\sin(3t)-\sin t,\,\cos t-\cos(3t)] = 6\sin t\,[\cos(2t),\,\sin(2t)]$

  Norme de ce vecteur : $6\,|\sin t|$

  Vecteur tangent unitaire : $[\cos(2t),\,\sin(2t)]$ pour $t \in]0,\pi[$, $-[\cos(2t),\,\sin(2t)]$ pour $t \in]\pi,2\pi[$ et, aux extrémités des arcs, $[1,0]$, $[1,0]$, $[-1,0]$, et $[-1,0]$.

  Vecteur normal $\vec{n}$ tel que $\vec{t} = t_1\,\vec{e}_1 + t_2\,\vec{e}_2$, $\vec{n}$ soit orienté comme la base : $\vec{n} = -t_2\,\vec{e}_1 + t_1\,\vec{e}_2$.

- **Quatrième courbe**

  Courbe fermée constituée d'un arc simple régulier correspondant à l'intervalle $]0,2\pi[$ et du point correspondant aux paramètres 0 et 2π (point de coordonnées $(1,0)$).

  Vecteur tangent : $2\,[\sin(2t)-\sin t,\,\cos t-\cos(2t)]$

  Norme de ce vecteur : $4\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

  Vecteur tangent unitaire : $\left[\cos\left(\frac{3t}{2}\right),\,\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right]$ pour $t \in]0,2\pi[$ et, au point de coordonnées $(1,0)$, $[1,0]$ et $[-1,0]$.

  Vecteur normal $\vec{n}$ tel que $\vec{t} = t_1\,\vec{e}_1 + t_2\,\vec{e}_2$, $\vec{n}$ soit orienté comme la base : $\vec{n} = -t_2\,\vec{e}_1 + t_1\,\vec{e}_2$.

2. (a) $\vec{N} = \vec{e}_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_2$

   (b) -

3. (a) La direction normale à la surface est celle du vecteur de composantes $[1,1,1]$

   (b) La direction normale à la surface est celle du vecteur de composantes $[6,8,-1]$

   (c) -

4. (a) Droite d'équation cartésienne $2x+y+1=0$

   (b) Ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

   (c) Hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$

(d) Demi-circonférence centrée à l'origine, de rayon 1 et dont les points ont une ordonnée positive.

Equation cartésienne : $y = \sqrt{1 - x^2}$

(e) Circonférence de centre $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$.

Equation cartésienne : $x^2 + y^2 + 2x - y = 1$

(f) Ellipsoïde d'équation cartésienne $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

5. (a) – Dans le plan : l'équation donnée est celle d'une ellipse.
   Paramétrage : $(\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$

   – Dans l'espace, l'équation est celle d'un cylindre elliptique.
   Paramétrage : $\left(\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t,\ s\right),\ t \in [0, 2\pi],\ s \in \mathbb{R}$

   (b) L'équation est celle d'un cône circulaire droit, surface de révolution autour de l'axe Y.

   Paramétrage : $(s\cos t,\ s,\ s\sin t),\ t \in [0, 2\pi],\ s \in \mathbb{R}$

   (c) L'équation est celle d'un ellipsoïde.

   Paramétrage : $\left(\cos t\ \sin s,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin t\ \sin s,\ \cos s\right),\ t \in [0, 2\pi],\ s \in [0, \pi]$

6. -

7. -

8. -

9. Voir EK.

2.3.5 Exercices proposés dans la section (2.2.5)

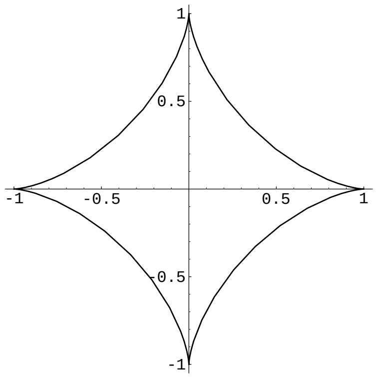
1. La fonction $\vec{f}(x, y, z) = [2x, 2y, 4z]$ est de classe C_∞ dans l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^3$ et son rotationnel est nul ; elle s'écrit donc $\vec{f} = \operatorname{grad} \alpha$.
   Il en résulte que l'intégrale donnée est indépendante du chemin choisi ; elle vaut 16.

2. L'intégrale sur la circonférence unité centrée à l'origine donne 2π.
   L'intégrale sur une circonférence qui n'entoure pas l'origine est nulle.
   Cela s'explique par le fait que la fonction vectorielle $\left[-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right]$ est le gradient de la fonction argument, laquelle n'est pas continue dans le complémentaire de l'origine.

   Voir aussi EK.

3. (a) Longueur de l'astroïde : $\dfrac{4\left(a^2+ab+b^2\right)}{a+b}$

   Représentation graphique de la courbe dans le cas $a = b = 1$



   (b) Longueur de l'épicycloïde à deux rebroussements : 24

   (c) Aire de la surface latérale d'un cône : $\pi R\sqrt{R^2+h^2}$ où R et h désignent respectivement le rayon de la base et la hauteur du cône.

   (d) Longueur de l'arcade de cycloïde : 8

   Aire de la surface déterminée par cette courbe et l'axe X : $\mathcal{A} = 3\pi$

   Explication. Comme un paramétrage (régulier, injectif) de la surface est donné par

$$\vec{\phi}(t,v) = [\gamma_1(t), v\gamma_2(t), 0] = [t-\sin t, v(1-\cos t), 0], \quad t \in [0, 2\pi],\ v \in [0,1]$$

   on a successivement

$$D_t\vec{\phi} = [1-\cos t, v\sin t, 0],\ D_v\vec{\phi} = [0, 1-\cos t, 0],$$

$$D_t\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi} = [0,0,(1-\cos t)^2] = \left[0, 0, \frac{3}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} - 2\cos t\right].$$

   Il s'ensuit que

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \|D_t\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}\|\, dv\right) dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} - 2\cos t\right) dt = 3\pi.$$

   (e) Surface déterminée par la cardioïde : 6π

4. Les intégrales à calculer valent

   (a) $\dfrac{256}{15}$

   (b) 8π

   (c) $\dfrac{3\pi}{4}$

5. (a) Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $-\dfrac{56}{15}$
   (b) Les intégrales des deux membres de la formule sont nuls.
   (c) L'application de la formule de Green au calcul de l'intégrale demandée conduit à la valeur $\dfrac{\pi R^4}{2}$

6. (a) Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\dfrac{32\pi}{3}$
   (b) Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\dfrac{81(\pi+3)}{4}$

7. (a) Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\dfrac{1}{3}$
   (b) Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur -4π

8. Voir EK.

9. Voir EK.

Chapitre 3

Fonctions holomorphes

3.1 RAPPELS THEORIQUES

3.1.1 Préliminaires

Homotopie de chemins

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Considérons deux chemins $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2 : [a,b] \to \Omega$ de classe C_0.

Ces chemins sont dits *homotopes dans* Ω *comme chemins à extrémités fixes* s'il existe $\vec{H} : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ continu tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\gamma}_1(t) & = & \vec{H}(t,0) \\ \vec{\gamma}_2(t) & = & \vec{H}(t,1) \end{array} \right. \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \vec{H}(a,s) & = & \vec{\gamma}_1(a) & = & \vec{\gamma}_2(a) \\ \vec{H}(b,s) & = & \vec{\gamma}_1(b) & = & \vec{\gamma}_2(b) \end{array} \right. \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Si les chemins $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ sont, en plus, fermés, on dit qu'ils sont *homotopes dans* Ω *comme chemins fermés* s'il existe $\vec{H} : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ continu tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\gamma}_1(t) & = & \vec{H}(t,0) \\ \vec{\gamma}_2(t) & = & \vec{H}(t,1) \end{array} \right. \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

et

$$\vec{H}(a,s) = \vec{H}(b,s) \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Nombres complexes

Rappelons que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Une telle écriture est appelée la *représentation cartésienne* de z. Le réel x s'appelle la *partie réelle* de z et le réel y s'appelle la *partie imaginaire* de z. On utilise les notations $\Re z = x$ et $\Im z = y$.

Le *module* du complexe z, noté $|z|$, est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il s'agit de la distance euclidienne de z à 0 dans $\mathbb{C}$.

Enfin, le *conjugué* de z est le nombre complexe défini par $\bar{z} = x - iy$.

Un nombre complexe non nul z peut aussi s'écrire sous la forme

$$z = r\,[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)] \quad \text{avec} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Une telle écriture est appelée *représentation polaire* de z (on parle aussi de *représentation trigonométrique*). Dans ce cas, r est bien sûr le module de z et θ est appelé *argument* de z.

Remarquons que l'argument d'un nombre complexe non nul n'est pas unique : si θ est un argument de $z \in \mathbb{C}_0$, alors $\theta + 2k\pi$ l'est encore pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes

1. La fonction ***exponentielle*** est définie sur $\mathbb{C}$ par
$$e^z = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}.$$

2. On obtient les fonctions ***cosinus, sinus, cosinus hyperbolique*** et ***sinus hyperbolique*** sur $\mathbb{C}$ en posant
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad , \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$
En particulier, si θ est réel,
$$\cos(\theta) = \Re\left(e^{i\theta}\right) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \Im\left(e^{i\theta}\right)$$
ou encore
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
ce qui permet, vu ce qui précède, d'écrire tout nombre complexe non nul sous la forme
$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}$$
(certains auteurs parlent de *représentation exponentielle* de z).

3. La ***valeur principale de l'argument*** (ou ***argument principal***) de $z \in \mathbb{C}_0$, noté $\mathrm{Arg}\,(z)$, est l'unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z|\, e^{i\theta}$.
La fonction Arg est définie sur $\mathbb{C}_0$ et à valeurs dans $]-\pi, \pi]$. Elle n'est cependant continue que sur le complémentaire de $]-\infty, 0]$. On dit que cette fonction admet une *coupure* sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

4. Le ***logarithme complexe correspondant à la valeur principale de l'argument*** est la fonction définie par
$$\mathrm{Log}_\pi = \mathrm{Log} = \mathrm{Ln} \ : \ \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C} \ : \ z \mapsto \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,(z).$$
Pour tout $z \in \mathbb{C}_0$, on a $e^{\mathrm{Ln}\,(z)} = z$ mais, en général, $\mathrm{Ln}\,(e^z) \neq z$.
Remarquons que le logarithme complexe défini ci-dessus n'est continu que sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.

5. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}_0$, on définit la ***puissance généralisée de z correspondant à la valeur principale de l'argument*** en posant
$$z^\alpha = e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}.$$
Cette fonction est continue sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.

Remarque

Il existe d'autres définitions de l'argument (et, par conséquent, du logarithme et de la puissance généralisée) qui mènent à des coupures placées en d'autres demi-droites.

En particulier, lorsque l'argument est choisi dans $]0, 2\pi]$, on le note Arg_0 (le logarithme correspondant est, quant à lui, noté Log_0).

La fonction Arg_0 et celles qui en dépendent sont continues sur le complémentaire de $[0, +\infty[$.

Attention aux habitudes !

Soient z_1, z_2 et α des nombres complexes non nuls.

En général,

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) \neq \mathrm{Arg}\,(z_1) + \mathrm{Arg}\,(z_2)$$

(l'égalité n'a lieu que si $\mathrm{Arg}\,(z_1) + \mathrm{Arg}\,(z_2) \in]-\pi, \pi]$). De même,

$$\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}\,(z_1) + \mathrm{Ln}\,(z_2) \quad \text{et} \quad (z_1 z_2)^\alpha \neq z_1^\alpha z_2^\alpha.$$

Un cas particulier d'intégrale curviligne

On sait qu'il existe une correspondance entre les points de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{R}^2$:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dans la suite, nous utiliserons fréquemment cette identification et nous considérerons que $\mathbb{C}$ est muni de la topologie de $\mathbb{R}^2$. De plus, si f est une fonction d'une variable complexe, nous l'identifierons avec la fonction de deux variables réelles définie par $(x, y) \mapsto f(x + iy)$. Par abus de notation, nous écrirons donc $f(z)$ ou $f(x, y)$ selon le contexte.

Considérons $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C_1 par morceaux. Alors γ peut s'écrire sous la forme $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, où γ_1 et γ_2 sont à valeurs réelles. On définit un paramétrage à partir de γ par

$$\vec{\gamma} \;:\; [a, b] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto [\gamma_1(t), \gamma_2(t)].$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est une fonction de classe C_1 par morceaux, on définit

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\vec{\gamma}} f dx + i f dy.$$

Il s'agit d'une intégrale curviligne sur un chemin du plan où le champ a deux composantes complexes : $f_1 = f$ et $f_2 = if$. Il en découle que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, D\gamma(t)\, dt.$$

Dans la pratique, c'est cette formule qui est utilisée.

3.1.2 Fonctions holomorphes

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *holomorphe en* z_0 si la limite

$$\lim_{h \in \mathbb{C}_0,\, h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe et est finie.

Dans ce cas, la limite est notée $Df(z_0)$.
Une fonction est *holomorphe dans* Ω si elle est holomorphe en tout point de Ω.
On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω.

Si on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est de classe C_1, alors f est holomorphe dans Ω (considéré comme ouvert de $\mathbb{C}$) si et seulement si elle vérifie l'**équation de Cauchy-Riemann** dans Ω (considéré comme ouvert de $\mathbb{R}^2$) :

– Sous forme complexe : $D_x f + i D_y f = 0$
– Sous forme réelle : $\left\{ \begin{array}{lcl} D_x \Re f & = & D_y \Im f \\ D_x \Im f & = & -D_y \Re f \end{array} \right.$

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

pour tous chemins γ_1 et γ_2 de classe C_1 par morceaux qui sont homotopes dans Ω.

Conséquence importante

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si γ est fermé et homotope à un chemin constant dans Ω, alors

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Retenons quelques exemples de base de fonctions holomorphes.

1. Tout polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ est holomophe dans $\mathbb{C}$.
2. Toute fonction rationnelle $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ (P, Q polynômes) est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des zéros de Q.
3. La fonction exponentielle est holomorphe dans $\mathbb{C}$.
4. Les fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.
5. Le logarithme complexe Ln et les puissances généralisées correspondant à la valeur principale de l'argument sont holomorphes dans le complémentaire de $]-\infty, 0]$.

Passons à présent en revue quelques propriétés immédiates des fonctions holomorphes.

Génération de fonctions holomorphes

1. Toute combinaison linéaire de fonctions holomorphes dans Ω est holomorphe dans Ω.
2. Le produit de deux fonctions holomorphes dans Ω est holomorphe dans Ω.
3. Si f est holomorphe dans Ω et si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, alors $\dfrac{1}{f}$ est holomorphe dans Ω.
4. Si f est holomorphe dans Ω, si g est holomorphe dans ω et si $g(\omega) \subset \Omega$, alors $f \circ g$ est holomorphe dans ω.

Propriétés particulières

1. Si Ω est connexe et si f est une fonction holomorphe dans Ω telle que $Df \equiv 0$ dans Ω, alors f est constant dans Ω.
2. Si Ω est connexe et si f est une fonction à valeurs réelles holomorphe dans Ω, alors f est constant dans Ω.

Quelques fonctions de base non holomorphes

Les fonctions $z \mapsto \Re z$, $z \mapsto \Im z$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)$ ne sont holomorphes sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$.

3.1.3 Formule intégrale de Cauchy et conséquences

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$.

Si $0 < r < \operatorname{dist}\left(z_0, \complement\Omega\right)$ et si γ_r décrit le cercle de centre z_0 et de rayon r (*i.e.* $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$), alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z}\, du = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad |z - z_0| < r \\ 0 & \text{si} \quad |z - z_0| > r \end{cases}$$

Retenons trois conséquences importantes de la formule intégrale de Cauchy.

1. **Représentation des dérivées**

   Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (Ω ouvert de $\mathbb{C}$), alors
   - f est C_∞ dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (par rapport à ses variables réelles),
   - $D^m f \in \mathcal{O}(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$,
   - si $z_0 \in \Omega$ et si $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et $0 < r < \operatorname{dist}\left(z_0, \complement\Omega\right)$, alors

     $$D^m f(z) = \frac{m!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)^{m+1}}\, du$$

     pour tout z tel que $|z - z_0| < r$.

2. **Théorème de Liouville**

   Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (on dit que f est une fonction *entière*) et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

   $$|f(z)| \leq C\,(1 + |z|)^N \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

   alors f est un polynôme de degré au plus N.

3. **Théorème de Weierstrass**

   Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{O}(\Omega)$ telle que $\sup\limits_{z\in K} |f_m(z) - f(z)| \to 0$ pour tout compact $K \subset \Omega$, alors $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et

   $$\sup_{z\in K} \left| D^k f_m(z) - D^k f(z) \right| \to 0$$

   pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

3.1.4 Séries de puissances, développement de Taylor

Séries de puissances

Une série de puissances est une série du type

$$S(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m, \qquad z \in \mathbb{C}$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$ est une constante donnée et $a_m \in \mathbb{C}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

1. **Convergence de la série**
   Si $R,\ C > 0$ sont tels que
   $$\sup_{m \in \mathbb{N}} R^m |a_m| \leq C$$
   alors la série S converge absolument et uniformément sur tout compact de
   $$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - z_0| < R\}\,.$$
   Le rayon R_S de la plus grande boule sur laquelle la série converge (le *disque de convergence*) est appelé son *rayon de convergence.*

   Dans la pratique, le rayon de convergence d'une série de puissances S est calculé en utilisant le critère du quotient ou de la racine : si $\sqrt[m]{|a_m|} \to L$ ou si $\left|\dfrac{a_{m+1}}{a_m}\right| \to L$ avec $L \in [0, +\infty[$ ou $L = +\infty$, alors
   $$R_S = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad L = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{L} & \text{si} \quad L \in]0, +\infty[\\[2ex] 0 & \text{si} \quad L = +\infty \end{cases}$$

   Remarquons que $S(z)$ converge si $|z - z_0| < R_S$ et diverge si $|z - z_0| > R_S$. En toute généralité, on ne peut cependant rien dire sur la convergence lorsque $|z - z_0| = R_S$.

2. **Propriétés de la fonction S**
   La fonction S est holomorphe dans $B\,(z_0, R_S)$ et
   $$D^k S(z) = \sum_{m=k}^{+\infty} a_m\, m(m-1)...(m-k+1)\,(z - z_0)^{m-k}$$
   où la convergence a lieu uniformément sur tout compact de $B\,(z_0, R_S)$.

Développement de fonctions holomorphes en séries de puissances

Nous savons que toute série de puissances définit une fonction holomorphe sur son disque de convergence.

Réciproquement, toute fonction holomorphe peut se développer en série de puissances grâce au *développement de Taylor* : si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, alors

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(D^m f)(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

pour tout $z \in B\left(z_0, \operatorname{dist}\left(z_0, \complement\Omega\right)\right)$.

Il n'est pas toujours facile de trouver une relation de récurrence pour calculer $(D^m f)(z_0)$.
Dans la pratique, il est préférable de partir des développements en série de puissances des fonctions élémentaires "de référence" :

Fonction	z_0	Développement	Domaine de convergence
e^z	0	$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$	$z \in \mathbb{C}$
$\dfrac{1}{1-z}$	0	$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} z^m$	$\lvert z\rvert < 1$

Ces développements conduisent notamment à

Fonction	z_0	Développement	Domaine de convergence
$\cos(z)$	0	$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}$	$z \in \mathbb{C}$
$\sin(z)$	0	$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$	$z \in \mathbb{C}$
$\cosh(z)$	0	$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$	$z \in \mathbb{C}$
$\sinh(z)$	0	$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$	$z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Ln}(1+z)$	0	$\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} z^m$	$\lvert z\rvert < 1$

3.1.5 Zéros des fonctions holomorphes

On dit que z_0 est un *zéro* de la fonction holomorphe f si $f(z_0) = 0$. De plus,

– c'est un zéro *p-uple* ($p \in \mathbb{N}_0$) ou *de multiplicité* p si

$$(D^m f)(z_0) = 0,\ \forall\, m \in \{0, ..., p-1\}, \quad \text{et} \quad (D^p f)(z_0) \neq 0$$

– c'est un zéro *d'ordre infini* si $(D^m f)(z_0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Donnons quelques propriétés relatives aux zéros des fonctions holomorphes.

1. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et si f possède un zéro d'ordre infini dans Ω, alors $f \equiv 0$ dans Ω.
2. Soit $p \in \mathbb{N}_0$ et soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$). Alors f possède un zéro p-uple z_0 dans Ω si et seulement si il existe une fonction h, holomorphe au voisinage de z_0, telle que
$$f(z) = (z - z_0)^p\, h(z) \text{ au voisinage de } z_0 \text{ et } h(z_0) \neq 0.$$
3. Si f est holomorphe dans un ouvert connexe Ω et si $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de zéros deux à deux distincts qui converge dans Ω, alors $f \equiv 0$ dans Ω.
En particulier, si f est holomorphe dans un ouvert connexe Ω et si f s'annule dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, alors $f \equiv 0$ dans Ω.

3.1.6 Séries de Laurent et singularités isolées

On dit que $z_0 \in \mathbb{C}$ est une *singularité isolée* d'une fonction f si f est holomorphe dans une boule centrée en z_0, excepté en z_0.

Nous allons voir qu'il est possible de décrire complètement la structure d'une telle fonction au voisinage de z_0.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{O}\left(\Omega \backslash \{z_0\}\right)$. Il existe un unique couple (h, H) de fonctions telles que

1. $h \in \mathcal{O}(\Omega)$,
2. $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et $H(0) = 0$,
3. $f(z) = h(z) + H\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right)$ pour tout $z \in \Omega \backslash \{z_0\}$.

De plus,

$$\begin{cases} h(z) & = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} a_m\, (z - z_0)^m \quad \text{si} \quad |z - z_0| < \text{dist}\left(z_0, \complement\Omega\right) \\ & \\ H(Z) & = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}\, Z^m \qquad \text{si} \quad Z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

avec

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}}\, dz,\ m \in \mathbb{Z}$$

où $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, et $0 < r < \text{dist}\left(z_0, \complement\Omega\right)$. Le couple (h, H) est appelé la *décomposition de Laurent* de f en z_0, où h est la *partie régulière* et H la *partie singulière* de f.

Au voisinage épointé $B\left(z_0, \operatorname{dist}\left(z_0, \complement\Omega\right)\right) \setminus \{z_0\}$ de z_0, on a donc

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m = \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}}_{H\left(\frac{1}{z-z_0}\right)} + \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m}_{h(z)}.$$

Ce développement est appelé la *série de Laurent* de f en z_0.

Si z_0 est une singularité isolée de f, nous distinguons les 3 cas suivants selon la nature de la partie singulière H de f.

1. **Prolongement holomorphe**

   Si $H \equiv 0$, on dit que f admet un prolongement holomorphe en z_0.

   Un exemple est donné par la fonction $z \mapsto \dfrac{\sin z}{z}$ et la singularité isolée $z_0 = 0$.

   Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) la fonction f admet un prolongement holomorphe en z_0,
   (b) la limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe et est finie,
   (c) la fonction f est bornée dans un voisinage de z_0.

2. **Pôle d'ordre p**

   Si H est un polynôme de degré $p > 0$, on dit que z_0 est un *pôle d'ordre* p de f.

   Dans ce cas, on a $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

   Un exemple est donné par la fonction $z \mapsto \dfrac{\cos(z)}{z^p}$ et la singularité isolée $z_0 = 0$.

   Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) la singularité z_0 est un pôle d'ordre p pour f,
   (b) la limite $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^p f(z)$ existe et diffère de 0,
   (c) la fonction $z \mapsto (z-z_0)^p f(z)$ est bornée dans un voisinage de z_0 et la fonction $z \mapsto (z-z_0)^{p-1} f(z)$ n'est bornée dans aucun voisinage de z_0,
   (d) il existe une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0, telle que $g(z_0) \neq 0$ et $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^p}$ au voisinage de z_0.

3. **Singulartié essentielle**

   Si H n'est pas un polynôme (*i.e.* H est une série de puissances dont une infinité de coefficients sont non nuls), on dit que z_0 est une *singularité essentielle* de f.

   Un exemple est donné par la fonction $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ et la singularité $z_0 = 0$.

   Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) la singularité z_0 est essentielle pour f,
   (b) la limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ n'existe pas.

3.1.7 Intégrales et théorème des résidus

Soit z_0 une singularité isolée d'une fonction f dans Ω.

Le *résidu de f en z_0* est la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz$$

où $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, et $0 < r < \mathrm{dist}\left(z_0, \complement\Omega\right)$.

Par définition, on a

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = a_{-1} = (DH)(0),$$

coefficient de $\dfrac{1}{z - z_0}$ du développement de Laurent de f en z_0.

Si f admet un prolongement holomorphe en z_0, il est clair que $\mathrm{Res}_{z_0} f = 0$.

Pour obtenir le résidu d'une fonction en une singularité isolée, une méthode est bien sûr d'utiliser les outils mis au point pour le calcul de la partie singulière de la fonction. Voici deux résultats plus spécifiques.

– Si z_0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$ de f,

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1} \left[(z - z_0)^p f(z) \right].$$

En particulier, pour un pôle d'ordre 1 (on parle de *pôle simple*),

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

– Si f_1 et f_2 sont des fonctions holomorphes au voisinage de z_0 et si z_0 est un zéro simple de f_2, alors

$$\mathrm{Res}_{z_0} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) = \frac{f_1(z_0)}{(Df_2)(z_0)}.$$

L'intérêt du calcul des résidus provient du résultat suivant, appelé ***théorème des résidus***.

Soient $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, ..., z_J\})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ un chemin fermé ne passant pas par les points $z_1, ..., z_J$ et homotope à un chemin constant dans Ω. Alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Res}_{z_j} f \;\; I_\gamma(z_j)$$

où $I_\gamma(z_j) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z - z_j}\, dz$ pour tout $j \in \{1, ..., J\}$.

On appelle $I_\gamma(z_j)$ l'indice de γ par rapport à z_j : il compte le nombre de tours que fait γ autour de z_j (attention, il change de signe si on tourne dans le sens horlogique).

Dans la pratique, les trois lemmes suivants peuvent s'avérer utiles.

1. **Lemme des grandes encoches**

   Soit A un angle plein de sommet z_0 et d'ouverture α, et soit C_R l'arc de cercle de centre z_0 et de rayon R intercepté par A. Si f est continu dans A et si

   $$\lim_{z\to\infty,\, z\in A} (z-z_0)\, f(z) = \lambda \in \mathbb{C},$$

   alors

   $$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = i\alpha\lambda.$$

2. **Lemme des petites encoches**

   Soit A un angle plein de sommet z_0 et d'ouverture α, et soit C_R l'arc de cercle de centre z_0 et de rayon R intercepté par A. Si f est continu dans A et si

   $$\lim_{z\to z_0,\, z\in A} (z-z_0)\, f(z) = \lambda \in \mathbb{C},$$

   alors

   $$\lim_{R\to 0} \int_{C_R} f(z)\, dz = i\alpha\lambda.$$

3. **Lemme de Jordan**

   Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit A un angle plein de sommet z_0 et d'ouverture α inclus dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \langle\, \bar{a}, (z-z_0)\, \rangle \leq 0\}$. Notons C_R l'arc de cercle de centre z_0 et de rayon R intercepté par A. Si f est continu dans A et si

   $$\lim_{z\to\infty,\, z\in A} f(z) = 0,$$

   alors

   $$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} e^{az} f(z) dz = 0.$$

3.2 EXERCICES PROPOSES

3.2.1 Préliminaires

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants (α est réel).

   (a) $\dfrac{1+i}{1-2i}$

   (b) $\dfrac{1}{\overline{2i^3-1}}$

   (c) $\dfrac{1}{\sin\alpha + i\cos\alpha}$

(d) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{3}\right)$

2. Déterminer le module et la valeur principale (*i.e.* dans $]-\pi, \pi]$) de l'argument des complexes suivants.

   (a) e^i

   (b) $(1+i)^{12}$

   (c) $z_1,\ z_2$ et $z_1 z_2$ où $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = 5i$.

3. Déterminer les racines quatrièmes de 1 (resp. $16i$) et en donner une représentation géométrique.

4. Résoudre les équations suivantes (z est une variable complexe).

   (a) $z^2 + 1 = 0$

   (b) $z^4 - 16 = 0$

   (c) $z^4 + 16 = 0$

   (d) $z^2 + z + 1 = 0$

   (e) $z^3 - 1 = 0$

   (f) $z^2 - i = 0$

5. Déterminer la nature et donner une représentation graphique des ensembles E_j définis ci-dessous.

   (a) $E_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z - 3 - 2i| = \frac{4}{3}\right\}$

   (b) $E_2 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ 1 \leq |z - 1 + 4i| \leq 5\}$

   (c) $E_3 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ 0 < |z - 1| < 1\}$

   (d) $E_4 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ -\pi < \Re z < \pi\}$

   (e) $E_5 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \Im(z^2) = 2\}$

   (f) $E_6 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \Re z > -1\}$

   (g) $E_7 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z + 1| = |z - 1|\}$

   (h) $E_8 = \left\{z \in \mathbb{C} \ :\ |\text{Arg } z| \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

   (i) $E_9 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \Re z \leq \Im z\}$

   (j) $E_{10} = \left\{z \in \mathbb{C} \ :\ \Re\left(\frac{1}{z}\right) < 1\right\}$

6. On définit $\mathbb{C}^2$ comme étant l'ensemble des couples de complexes (encore appelés vecteurs à deux composantes complexes). Dans cet ensemble, on définit l'addition et la multiplication par un complexe α respectivement par

$$(z_1, z_2) + (z_1', z_2') = (z_1 + z_1', z_2 + z_2') \quad \text{et} \quad \alpha\,(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2),$$

de même que le *produit scalaire*

$$\big\langle\, (z_1, z_2), (z_1', z_2')\, \big\rangle \;=\; z_1\overline{z_1'} + z_2\overline{z_2'}$$

et la norme

$$\|(z_1, z_2)\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

(Il est possible de généraliser ces notions dans $\mathbb{C}^n$.)

Dans $\mathbb{C}^2$, calculer la norme de $(1, i)$ et le produit scalaire

$$\left\langle\, (1, i), \left(1 + i, \frac{1}{1+i}\right) \right\rangle.$$

7. (a) La série $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}$ converge-t-elle ? Pourquoi ? En déterminer la somme.

   (b) La série $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{3^m}$ converge-t-elle ? Pourquoi ? En déterminer la somme.

   (c) Dans chacun des cas suivants, déterminer si les séries sont absolument convergentes/ semi-convergentes. Si besoin, préciser en fonction du complexe z.

   - $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-z)^m}{m}$
   - $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(10-15i)^m}{m!}$
   - $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} (1+i)^{-m}$
   - $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} m^2 \left(\frac{i}{3}\right)^m$

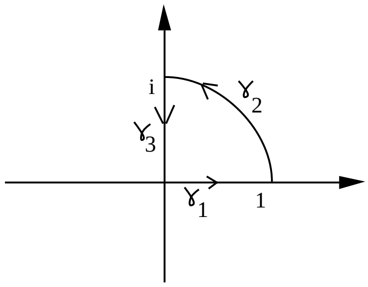
   Rappel. Une série est dite *semi-convergente* lorsque cette série converge alors que la série des modules associée diverge.

3.2.2 Un cas particulier d'intégrale curviligne

1. Soit $f(z) = |z|$. Calculer

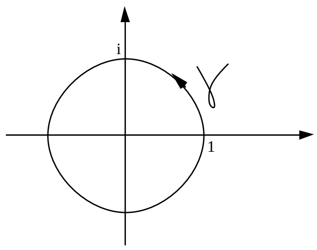
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

pour les chemins C_1 suivants.



2. Calculer $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ avec
   (a) $f(z) = z$
   (b) $f(z) = \overline{z}$
   (c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$
   (d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

   et le chemin γ défini sur la figure ci-contre.



3. Soit $S_\gamma = \displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,dz$.
   (a) Montrer que, si γ est fermé, alors l'expression $\dfrac{1}{2i} S_\gamma$ est réelle et en donner une interpétation.
   (b) Calculer S_γ pour le chemin formé par la juxtaposition du segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1,0)$ et du segment joignant $(1,0)$ et $(1,1)$.

3.2.3 Premiers pas avec les fonctions d'une variable complexe

1. Déterminer si les fonctions suivantes, prolongées par 0 en 0, sont continues en 0.
   (a) $f(z) = \dfrac{\Re(z^2)}{|z^2|}$
   (b) $g(z) = |z|^2\,\Re\left(\dfrac{1}{z}\right)$
2. Montrer que la fonction $f : z \mapsto \Re z$ n'est holomorphe en aucun point.

3. Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \Re(\cos z)$ est harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

   Rappel. Une fonction u de classe C_2 dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est dite *harmonique* dans Ω lorsqu'elle est annulée par le laplacien :
   $$\Delta u = D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

4. Déterminer les parties réelle et imaginaire du complexe $\cos(1+i)$.

5. Résoudre les équations suivantes en la variable complexe z.
   (a) $\cos z = 0$
   (b) $\cos z = 1$
   (c) $\cos z = 3$
   (d) $\sinh z = 0$

6. Déterminer $\mathrm{Log}_\pi\, z = \mathrm{Log}\, z = \mathrm{Ln}\, z$ (resp. $\mathrm{Log}_0\, z$) pour les complexes suivants.
   (a) $z_1 = -10$
   (b) $z_2 = 2 - 2i$
   (c) $z_3 = i$
   (d) $z_4 = -i$
   (e) $z_5 = e^{-i}$

7. Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants (définition des puissances utilisant Log puis Log_0) :
   (a) $z_1 = (-i)^i$
   (b) $z_2 = (-1)^{1+i}$

8. Déterminer où les fonctions f_j définies explicitement ci-dessous sont holomorphes.
   (a) $f_1(z) = \dfrac{1}{\sin z}$
   (b) $f_2(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$
   (c) $f_3(z) = \mathrm{Log}_0\,(1 + z)$
   (d) $f_4(z) = \dfrac{\mathrm{Log}\, z}{z^3 + 1}$

9. Soit la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En notant $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, on pose
$$P(x,y) = \Re f(z), \quad Q(x,y) = \Im f(z).$$
Représenter les courbes de niveau de P et de Q. Montrer que celles-ci sont orthogonales (au sens suivant : les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales entre elles).

Suggestion. Utiliser les gradients de P et Q, ainsi que les relations de Cauchy-Riemman pour les parties réelle et imaginaire d'une fonction d'une variable complexe.

3.2.4 Fonctions holomorphes et formule intégrale de Cauchy

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω connexe. Démontrer que, s'il existe une constante C telle que $|f| = C$ dans Ω, alors f est constant dans Ω.

2. On suppose Ω connexe. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, démontrer que $\overline{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si f est constant dans Ω.

3. Soit $f \in C_2(\Omega)$. Démontrer que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si on a $\Delta f = 0$ et $\Delta(zf) = 0$ dans Ω.

4. Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ?

   (a) $f_1(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$

   (b) $f_2(z) = \dfrac{1}{e^{iz} + i}$

   (c) $f_3(z) = \dfrac{\sin z}{\sinh z}$

   (d) $f_4(z) = \dfrac{1}{(z^2 + z + 1)^2}$

   (e) $f_5(z) = \dfrac{z^{1/2}}{z - i}$

5. Où la fonction suivante est-elle holomorphe ?
Quelles en sont les singularités isolées ?
$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)}$$

6. Calculer les intégrales suivantes.

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \Re z \; dz$

(b) $\displaystyle\int_\gamma e^{z^2}\, dz$

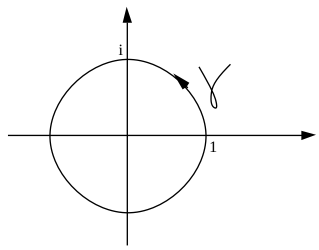
(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-2}\, dz$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\, dz$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-\frac{i}{2}}\, dz$

(f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\, dz$

si γ désigne le chemin simple régulier défini ci-contre.



7. Intégrer la fonction $f(z) = \dfrac{z^2-4}{z^2+4}$ sur chacune des circonférences définies ci-dessous (on supposera que ces circonférences sont parcourues dans le sens trigonométrique).

   (a) $\mathcal{C}_1 \equiv |z-i| = 2$

   (b) $\mathcal{C}_2 \equiv |z-1| = 2$

   (c) $\mathcal{C}_3 \equiv |z+3i| = 2$

   (d) $\mathcal{C}_4 \equiv |z| = \dfrac{\pi}{2}$

   (e) $\mathcal{C}_5 \equiv |z| = 3$

8. (a) Est-il possible de calculer $\text{Ln}\left[(1+i)^i\right]$? Pourquoi ?
   Si la réponse est affirmative, calculer ce complexe.

   (b) On pose $f_+(z) = \text{Ln}\,(1+iz)$, $f_-(z) = \text{Ln}\,(1-iz)$ et $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$.
   Où la fonction f est-elle holomorphe ?

   (c) Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction if (où f désigne la fonction introduite au point (b)) est une fonction à valeurs réelles. Déterminer cette fonction.

9. Calculer l'intégrale de la fonction f_j sur la circonférence $\mathcal{C}_j$, chaque circonférence étant parcourue dans le sens trigonométrique.

   (a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z^2-1}, \quad \mathcal{C}_1 \equiv |z-1| = \dfrac{\pi}{2}$

   (b) $f_2(z) = \dfrac{\cos z}{2z}, \quad \mathcal{C}_2 \equiv |z| = \dfrac{1}{2}$

(c) $f_3(z) = \dfrac{\text{Ln }(z+1)}{z^2+1}, \quad \mathcal{C}_3 \equiv |z-2i| = 2$

(d) $f_4(z) = \dfrac{\text{Ln }(z+1)}{z^2+1}, \quad \mathcal{C}_4 \equiv |z-2i| = \dfrac{1}{2}$

10. Si $a > 1$, calculer l'intégrale suivante en utilisant "la technique des fonctions holomorphes".

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x}\, dx$$

11. La fonction $z \mapsto \sin z$ est-elle bornée sur $\mathbb{C}$? Pourquoi ?

12. La proposition suivante est-elle vraie ? Pourquoi ?
"La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ tend vers 0 à l'infini."

13. Pourquoi la proposition suivante est-elle fausse ?
"Il existe une fonction f, holomorphe dans la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon 2, qui s'annule en 0 et telle que $f(z) > 0$ pour $|z| = 1$."

14. Montrer que, si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et si $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z}$ est borné dans $\mathbb{C}_0$, alors la fonction f est un multiple de la fonction $z \mapsto z$.

15. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$).
Si u est à valeurs réelles, une fonction v de classe C_2 dans Ω, à valeurs réelles, telle que $F = u + iv$ soit holomorphe dans Ω est appelée *conjugué harmonique de* u dans Ω.

    (a) Une fonction harmonique[1] u dans un ouvert Ω, à valeurs réelles, admet-elle toujours un conjugué harmonique dans Ω ? Pourquoi ?

    (b) Quelle condition (standard) sur l'ouvert Ω peut-on imposer afin qu'un tel conjugué harmonique existe ? Pourquoi ?

    (c) Interpréter ces champs et leurs courbes de niveau.

    (d) Appliquer ce qui précède à la fonction u définie par

$$u(z) = u(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln|z|$$

    avec $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Suggestion.
– Voir EK, section 13.4 et chapitre 18 ("courbes équipotentielles et lignes de forces").
– Voir aussi relation entre égalité des dérivées croisées pour un champ vectoriel $[f_1, f_2]$ et existence d'un champ scalaire dont le gradient est ce champ vectoriel (primitivation dans un "bon ouvert" de $\mathbb{R}^2$).

1. Voir exercice 3 de la section (3.2.3).

3.2.5 Séries de puissances et développement de Taylor

1. Déterminer le disque de convergence des séries suivantes.

   (a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} m!\ z^m$

   (b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$

   (c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-i)^{2m}}{m^3}$

   (d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^m}{2^m\ (m!)^2}$

   (e) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} 4^m\ (z-2)^m$

   (f) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m\ (iz-1)^m$

   Voir aussi EK page 677.

2. Développer les fonctions définies explicitement ci-dessous en série de puissances au point z_0 et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu. [2]

   (a) $\displaystyle\frac{1}{z^2+1},\quad z_0 = 0$

   (b) $\displaystyle\frac{1}{z},\quad z_0 = 1$

   (c) $\displaystyle\frac{z}{z^2-1},\quad z_0 = 0$

   (d) $\displaystyle\frac{z}{(z-1)(z+2)},\quad z_0 = 0$

   (e) $\displaystyle\frac{1}{1+z+z^2},\quad z_0 = 0$

   (f) $\displaystyle\frac{\sin z}{z},\quad z_0 = 0$

   (g) $\displaystyle\frac{1-\cos z}{z^2},\quad z_0 = 0$

   (h) $\displaystyle\frac{e^z}{1-z},\quad z_0 = 0$

2. **Rappel.** Si f est holomorphe dans $\omega \setminus \{z_0\}$ (ω désigne un voisinage de z_0) et si $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$, alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans ω.

3. (a) En procédant par coefficients indéterminés, montrer que

$$\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{15} + \dots \qquad |z| < \pi$$

   (b) Même question pour

$$e^{\frac{z}{\cos z}} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{2z^3}{3} + \dots \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

4. On donne S et F par

$$S(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2\, z^m, \quad F(z) = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}.$$

   Où ces fonctions sont-elles holomorphes (resp. égales) ?

   En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2}{2^m}$.

5. Déterminer le disque de convergence et la somme des séries suivantes.

   (a) $\displaystyle S_1(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m}$

   (b) $\displaystyle S_2(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m(m+1)}$

6. Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Montrer que, si $\Re f$ (resp. $\Im f$) est borné, alors f est constant.

7. Si f est une fonction holomorphe dans Ω et si z_0 est un zéro d'ordre p pour f, montrer que

$$|f(z)| \leq \frac{|z-z_0|^p}{r^p} \sup_{\{u\,:\,|u-z_0|=r\}} |f(u)|$$

   si $|z - z_0| < r$ et $0 < r < \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

8. On suppose que f et g sont des fonctions holomorphes dans l'ouvert connexe Ω.
   Montrer que, si le produit de f et g est nul en tout point de Ω, alors f est nul en tout point de Ω ou g est nul en tout point de Ω.

3.2.6 Singularités isolées et séries de Laurent

1. Soient f, g deux fonctions holomorphes dans l'ouvert connexe Ω.
   Montrer que, si la fonction $F = \overline{f}\ g$ est holomorphe dans Ω, alors f est constant dans Ω ou g est identiquement nul dans Ω.

2. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega = \mathbb{R} + i\,]-\delta, \delta[\ (\delta > 0)$.
   Montrer que, si $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x > 0$, alors $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel x.

3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses données.

   (a) Soit f une fonction holomorphe dans Ω et soit un chemin fermé γ de Ω.
   - On a $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.
   - On a $\displaystyle\int_\gamma Df(z)\,dz = 0$.

   (b) Si $z_0 \in \Omega$ est un zéro d'ordre p pour f (holomorphe dans Ω) alors
   - la fonction $F\ :\ z \mapsto \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^p}$ se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 ;
   - il en va de même de $\dfrac{1}{F}$.

   (c) Il existe une fonction f holomorphe au voisinage de 0 (exclu) telle que $Df(z) = \dfrac{1}{z}$.

4. Soient $z_1, \ldots, z_J \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_J\}$.
   Montrer que, si chacun des z_j est un pôle pour f et si f vérifie $|f(z)| \leq C|z|^p$ pour $|z|$ suffisamment grand, alors f est une fraction rationnelle.

5. Où les fonctions f_j définies explicitement ci-dessous sont-elles holomorphes ?
   Quelles sont leurs singularités isolées ?
   De quel type sont-elles ?

   (a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

   (b) $f_2(z) = \dfrac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^7}$

   (c) $f_3(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   (d) $f_4(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$

   (e) $f_5(z) = \tan z$

   (f) $f_6(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}\quad (\theta \in \mathbb{R})$

(g) $f_7(z) = \dfrac{\sinh\,(\pi z)}{z^2+1}$

(h) $f_8(z) = \dfrac{\mathrm{Ln}\,(z+1)}{z}$

(i) $f_9(z) = \dfrac{1}{z-z^3}$

(j) $f_{10}(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

(k) $f_{11}(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$

(l) $f_{12}(z) = \dfrac{\sinh z}{z^2}$

6. Construire le développement de Laurent de chacune des fonctions f_j proposées ci-dessous autour du point z_0 correspondant.
   Préciser l'ouvert de validité du développement.

   (a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z^4-z^5}, \quad z_0 = 0$

   (b) $f_2(z) = z\ \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad z_0 = 0$

   (c) $f_3(z) = \dfrac{e^z}{z^2-z^3}, \quad z_0 = 0$

   (d) $f_4(z) = \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^4}, \quad z_0 = \pi$

   (e) $f_5(z) = \dfrac{z^2-4}{z-1}, \quad z_0 = 1$

7. Soit la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}\, e^{\frac{1}{z}}.$$

   (a) Quelles sont ses singularités isolées ? De quel type sont-elles ?

   (b) On pose $\gamma_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, avec $r > 0,\ r \neq 1$. Déterminer $\displaystyle\int_{\gamma_r} f\left(\frac{1}{z}\right)\, dz$.

   (c) Déterminer les coefficients a_0 et a_{-1} du développement de Laurent de f en 0.

8. Soit z_0 une singularité isolée de la fonction f.

   (a) Si z_0 est un pôle d'ordre p pour f, quel est le type de singularité de z_0 pour Df ?

   (b) Si z_0 est une singularité essentielle pour f, quel est le type de singularité de z_0 pour Df ?

   (c) Déterminer le coefficient a_{-1} (le résidu) du développement de Laurent de Df en z_0.

3.2.7 Résidus, intégrales et théorème des résidus

1. Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées des fonctions de l'exercice 5 de la section (3.2.6).

2. Déterminer les singularités isolées des fonctions f_j définies ci-dessous.
   En préciser la nature.
   Calculer le résidu de chacune des fonctions en chacune de ses singularités.

   (a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$

   (b) $f_2(z) = \dfrac{\cos z}{z^6}$

   (c) $f_3(z) = \dfrac{\sin z}{z^6}$

   (d) $f_4(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-z}$

   (e) $f_5(z) = \text{cotan } z$

   (f) $f_6(z) = \sec z$

   (g) $f_7(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$

   (h) $f_8(z) = \dfrac{1}{3\ (z^4-1)}$

   (i) $f_9(z) = \tan z$

   (j) $f_{10}(z) = \dfrac{z^2}{z^4-1}$

3. Calculer l'intégrale de la fonction f_j sur la circonférence $\mathcal{C}_j$, chaque circonférence étant parcourue dans le sens trigonométrique.

   (a) $f_1(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{z^4}, \quad \mathcal{C}_1 \equiv |z-i| = 2$

   (b) $f_2(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad \mathcal{C}_2 \equiv |z| = 1$

   (c) $f_3(z) = \dfrac{1}{\sinh\left(\frac{\pi z}{2}\right)}, \quad \mathcal{C}_3 \equiv |z-1| = 1,4$

   (d) $f_4(z) = \tan(\pi z), \quad \mathcal{C}_4 \equiv |z| = 1$

   (e) $f_5(z) = \tan(\pi z), \quad \mathcal{C}_5 \equiv |z| = 2$

   (f) $f_6(z) = \dfrac{e^z}{\cos z}, \quad \mathcal{C}_6 \equiv |z| = 4,5$

   (g) $f_7(z) = \text{cotanh } z, \quad \mathcal{C}_7 \equiv |z| = 1$

(h) $f_8(z) = \dfrac{e^z}{\cos(\pi z)}, \quad \mathcal{C}_8 \equiv |z - i| = 1,5$

(i) $f_9(z) = \dfrac{\cosh z}{z^2 - 3iz}, \quad \mathcal{C}_9 \equiv |z| = 1$

(j) $f_{10}(z) = \dfrac{\tan(\pi z)}{z^3}, \quad \mathcal{C}_{10} \equiv \left| z + \dfrac{i}{2} \right| = 1$

(k) $f_{11}(z) = \dfrac{1 - 4z + 6z^2}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right)(2 - z)}, \quad \mathcal{C}_{11} \equiv |z| = 1$

(l) $f_{12}(z) = \dfrac{30z^2 - 23z + 5}{(2z - 1)^2 (3z - 1)}, \quad \mathcal{C}_{12} \equiv |z| = 1$

4. Soit $\gamma_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ r > 1$ et soit $\sqrt{z^2 - 1} := \sqrt{z - 1}\sqrt{z + 1}$ (avec détermination principale de l'argument). Montrer que
$$I_r = \int_{\gamma_r} \sqrt{z^2 - 1}\ dz = -i\pi.$$

RESULTAT THEORIQUE AUXILIAIRE (prolongements holomorphes)

Etant donné une fonction holomorphe définie de façon naturelle (souvent explicitement, analytiquement) dans un ouvert de $\mathbb{C}$, il est utile d'essayer de trouver une fonction holomorphe qui la prolonge dans un ouvert plus grand.

Par exemple, la fonction $\sqrt{1 - z^2} := (1 - z)^{1/2}(1 + z)^{1/2}$ est définie de façon naturelle dans $\Omega = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup]-1, 1[$ et y est holomorphe. Elle étend la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in]-1, 1[$.

La fonction $\sqrt{z^2 - 1} := (z - 1)^{1/2}(z + 1)^{1/2}$ est aussi définie de façon naturelle dans le complémentaire de $[-1, +\infty[$ ou dans le complémentaire de $]-\infty, 1]$. On peut l'étendre dans le complémentaire du segment $[-1, 1]$, ce qui donne alors une extension holomorphe à la fonction $\sqrt{x^2 - 1},\ x > 1$ par exemple.

Plus précisément, on a le résultat suivant (il en existe d'autres ; ils sont basés sur le calcul d'arguments).

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta \in \mathbb{Z},\ a < b$, et soient
$$f(z) = Ln(z - a) - Ln(z - b), \quad g(z) = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta.$$

Chacune de ces fonctions est définie et holomorphe dans le complémentaire d'une demi-droite. Chacune peut se prolonger holomorphiquement dans le complémentaire du segment $[a, b]$.

SUGGESTION. La fonction $f(z) = \sqrt{z + 1}\sqrt{z - 1}$ (notée $\sqrt{z^2 - 1}$) est holomorphe dans $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Méthode 1. La fonction $F(z) = \sqrt{1 + z}\sqrt{1 - z}$ est holomorphe dans le complémentaire de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et on a $f(z) = zF\left(\frac{1}{z}\right)$ dans Ω. On obtient $I_r = ir \int_0^{2\pi} e^{it} f(re^{it})\, dt = \int_{\gamma_{1/r}} \frac{F(z)}{z^3}\, dz = i\pi D^2 F(0) = -i\pi$.

Méthode 2. Au signe près, l'intégrale à calculer est égale à l'intégrale de la même fonction sur le contour "en haltères" autour de -1 et de 1, contour que l'on ramène sur le segment $[-1, 1]$ par passage à la limite.

5. Soit $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Calculer

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z \sinh z} dz$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz$

(c) $\displaystyle\int_\gamma e^{\frac{1}{z}}\ dz$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \sin\left(\frac{1}{z}\right)\ dz$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz$

6. Soit γ un chemin injectif régulier "orienté aire à gauche" qui paramétrise la courbe

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - 1 - i| = 1\}.$$

Calculer

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{Ln} z}{z+2}\ dz$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{Ln} z}{z - 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}}\ dz$

7. Soit γ un chemin régulier par morceaux, injectif , "orienté aire à gauche" et qui paramétrise le bord du carré de sommets $0,\ 3,\ 3+3i$ et $3i$. Calculer

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z+1+i}\ dz$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-1-i}\ dz$

8. Soit $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 4\pi]$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4\,(z+1+2i)}\ dz$$

9. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\sin x}\ dx$

(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2}\ dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$

(a désigne un paramètre réel dont il convient de trouver le domaine pour que la fonction à intégrer soit effectivement intégrable).

10. **Transformation de Joukowski**
On définit la fonction f par
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

(a) En quel type de courbe cette fonction transforme-t-elle les cercles centrés à l'origine de rayon différent de 1 (resp. les segments de droites) ?

(b) Graphiquement, montrer que cette fonction transforme les cercles passant par le point de coordonnées $(1, 0)$ (resp. $(-1, 0)$) en "profil d'aile d'avion".

(c) Montrer que f établit une bijection de $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
En déterminer l'inverse et montrer qu'il s'agit encore d'une fonction holomorphe.

3.3 SOLUTIONS

3.3.1 Exercices proposés dans la section (3.2.1)

1. (a) $\Re\left[\dfrac{1+i}{1-2i}\right] = -\dfrac{1}{5}, \quad \Im\left[\dfrac{1+i}{1-2i}\right] = \dfrac{3}{5}$

(b) $\Re\left[\dfrac{1}{\overline{2i^3-1}}\right] = -\dfrac{1}{5}, \quad \Im\left[\dfrac{1}{\overline{2i^3-1}}\right] = -\dfrac{2}{5}$

(c) $\Re\left[\dfrac{1}{\sin\alpha + i\cos\alpha}\right] = \sin\alpha, \quad \Im\left[\dfrac{1}{\sin\alpha + i\cos\alpha}\right] = -\cos\alpha$

(d) $\Re\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + i\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cosh\left(\dfrac{\pi}{3}\right), \quad \Im\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + i\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = -\dfrac{1}{2}\sinh\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

2. (a) $\left|e^i\right| = 1, \quad \mathrm{Arg}\left[e^i\right] = 1$

(b) $\left|(1+i)^{12}\right| = 64, \quad \mathrm{Arg}\left[(1+i)^{12}\right] = \pi$

(c) $|z_1| = 2\sqrt{2}, \quad \mathrm{Arg}\,[z_1] = \dfrac{3\pi}{4}$

$|z_2| = 5, \quad \mathrm{Arg}\,[z_2] = \dfrac{\pi}{2}$

$|z_1 z_2| = 10\sqrt{2}, \quad \mathrm{Arg}\,[z_1 z_2] = -\dfrac{3\pi}{4}$

3. Les racines quatrièmes de 1 sont $1,\ i,\ -1$ et $-i$.
   Celles de $16i$ sont données par $2\,e^{ik\pi/8},\ k = 1,\ 5,\ 9,\ 13$.

4. (a) $z^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm i$

   (b) $z^4 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2,\ 2i,\ -2 \text{ ou } -2i$

   (c) $z^4 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2\,e^{ik\pi/4},\ k = 1,\ 3,\ 5,\ 7$

   (d) $z^2 + z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = e^{\pm 2i\pi/3}$

   (e) $z^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \text{ ou } e^{\pm 2i\pi/3}$

   (f) $z^2 - i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm e^{i\pi/4}$

5. (a) Cercle de centre $(3, 2)$ et de rayon $\dfrac{4}{3}$.

   (b) Partie fermée du plan comprise entre les cercles de centre $(1, -4)$ et de rayon 1 et 5 respectivement.

   (c) Disque (boule) ouvert(e) de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, centre exclus.

   (d) Bande verticale ouverte de largeur 2π et symétrique par rapport à l'axe Y.

   (e) Hyperbole d'équation $xy = 1$.

   (f) Demi-plan situé à droite de la droite d'équation $x = -1$.

   (g) Axe Y.

   (h) Partie du plan formée des points d'abscisse strictement positive et situés entre les bissectrices des axes.

   (i) Demi-plan situé "au-dessus" de la droite d'équation $x = y$.

   (j) Extérieur du disque (boule) fermé(e) de centre $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

6. $\|(1, i)\| = \sqrt{2}, \quad \left\langle (1, i), \left(1 + i, \dfrac{1}{1+i}\right) \right\rangle = \dfrac{1-i}{2}$

7. (a) La série $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}$ converge et sa somme vaut e.

   (b) La série $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{3^m}$ converge et sa somme vaut $\dfrac{3}{2}$.

   (c) • La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-z)^m}{m}$ converge absolument si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$ ou $z = -1$; elle est semi-convergente si $|z| = 1$ avec $z \neq -1$ (*i.e.* $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

- La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(10-15i)^m}{m!}$ converge absolument.
- La série $\sum_{m=1}^{+\infty} (1+i)^{-m}$ converge absolument.
- La série $\sum_{m=1}^{+\infty} m^2 \left(\frac{i}{3}\right)^m$ converge absolument.

3.3.2 Exercices proposés dans la section (3.2.2)

1. La somme proposée vaut $\frac{i-1}{2}$.

2. Les intégrales proposées valent respectivement 0, $2i\pi$, $2i\pi$ et 0.

3. (a) On suppose γ de classe C_1 (ou C_1 par morceaux) et on montre que S_γ est un complexe imaginaire pur.

   Suggestion 1. Montrer que $S_\gamma + \overline{S_\gamma}$ est nul quand γ est fermé.

   Suggestion 2. On a

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}dz &= \int_\gamma (x-iy)dx \ + \ \int_\gamma (ix+y)dy \\ &= \int_\gamma xdx + ydy \ + \ i\int_\gamma xdy - ydx \\ &= i\int_\gamma xdy - ydx\end{aligned}$$

   car $\vec{f} = [x,y] = grad\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}^2$ donc l'intégrale curviligne $\int_\gamma xdx + ydy$ est nulle lorsque le chemin est fermé.

   Interprétation. Aire de la surface délimitée par la courbe fermée γ.

   (b) L'intégrale proposée vaut $1+i$.

3.3.3 Exercices proposés dans la section (3.2.3)

1. (a) On a

$$f(z) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad (z = x+iy, \ x,y \in \mathbb{R})$$

   ce qui permet de montrer que la réponse est non.

(b) On a

$$g(z) = (x^2+y^2)\,\Re\left(\frac{1}{z}\right) = (x^2+y^2)\,\Re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = x \quad (z = x+iy,\ x,y\in\mathbb{R})$$

ce qui permet de conclure que la réponse est oui.

2. Reprendre la définition et particulariser la façon dont on prend la limite sur h (réel-imaginaire pur).

3. -

4. $\Re\,[\cos(1+i)] = \cos 1\cosh 1$ et $\Im\,[\cos(1+i)] = -\sin 1\sinh 1$.

5. (a) $\cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

   (b) $\cos z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

   (c) $\cos z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm i\,\mathrm{arcosh}\,3 + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

   (d) $\sinh z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z\ = ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6. (a) $\mathrm{Log}_\pi\, z_1 = \ln 10 + i\pi = \mathrm{Log}_0\, z_1$

   (b) $\mathrm{Log}_\pi\, z_2 = \frac{3}{2}\ln 2 - i\,\frac{\pi}{4}$ tandis que $\mathrm{Log}_0\, z_2 = \frac{3}{2}\ln 2 - i\,\frac{7\pi}{4}$

   (c) $\mathrm{Log}_\pi\, z_3 = i\,\frac{\pi}{2} = \mathrm{Log}_0\, z_3$

   (d) $\mathrm{Log}_\pi\, z_4 = -i\,\frac{\pi}{2}$ tandis que $\mathrm{Log}_0\, z_4 = i\,\frac{3\pi}{2}$

   (e) $\mathrm{Log}_\pi\, z_5 = -i$ tandis que $\mathrm{Log}_0\, z_5 = i\,(2\pi-1)$

7. Définition des puissances utilisant Log :

   (a) $\Re\,[z_1] = e^{\pi/2}$ et $\Im\,[z_1] = 0$

   (b) $\Re\,[z_2] = -e^{-\pi}$ et $\Im\,[z_2] = 0$

   Définition des puissances utilisant Log_0 :

   (a) $\Re\,[z_1] = e^{-3\pi/2}$ et $\Im\,[z_1] = 0$

   (b) $\Re\,[z_2] = -e^{-\pi}$ et $\Im\,[z_2] = 0$

8. (a) $\frac{1}{\sin z}$ est holomorphe dans le complémentaire de $\{k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$.

   (b) $\frac{1}{z^4+1}$ est holomorphe dans le complémentaire de $\left\{e^{i\pi/4},\ e^{i3\pi/4},\ e^{i5\pi/4},\ e^{i7\pi/4}\right\}$.

(c) $\mathrm{Log}_0\,(1+z)$ est holomorphe dans le complémentaire de la demi-droite des réels supérieurs ou égaux à -1.

(d) $\dfrac{\mathrm{Log}\, z}{z^3+1}$ est holomorphe dans le complémentaire de l'ensemble des réels négatifs ou nuls et des complexes $e^{\pm i\pi/3}$.

9. -

3.3.4 Exercices proposés dans la section (3.2.4)

1. Si $C=0$, alors $f(z)=0$ pour tout z.

   Si $C\neq 0$, alors $C^2 = f\ \bar{f}$ implique $\bar{f} = \dfrac{C^2}{f}$ donc $\bar{f}$ est aussi holomorphe.

   On en déduit que $\Re f$ et $\Im f$ sont holomorphes, donc constants.

2. Si f et $\overline{f}$ sont holomorphes, il en est de même de $\Re f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ et de $\Im f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$. Ces deux fonctions étant à valeurs réelles, holomorphes, elles sont donc constantes dans le connexe Ω. Il en résulte que f l'est aussi.

   Toute fonction constante étant holomorphe, la réciproque est claire.

3. On a $\Delta(zf) = z\Delta f + 2(D_x+iD_y)f$ et $\Delta f = (D_x-iD_y)(D_x+iD_y)f$ donc

$$\left.\begin{array}{r}\Delta f = 0\\ \Delta(zf)=0\end{array}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad (D_x+iD_y)f=0.$$

4. (a) f_1 est holomorphe dans le complémentaire de $\{2ik\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$.

   (b) f_2 est holomorphe dans le complémentaire de $\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   (c) f_3 est holomorphe dans le complémentaire de $\{ik\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$ (et peut se prolonger en une fonction holomorphe en 0 : voir plus loin).

   (d) f_4 est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\left\{e^{2i\pi/3},\, e^{-2i\pi/3}\right\}$.

   (e) $f_5(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus(\{i\}\cup\,]-\infty,0])$.

5. La fonction f est holomorphe dans le complémentaire de $\{0\}\cup\left\{\dfrac{1}{k\pi}\ :\ k\in\mathbb{Z}_0\right\}$.

   Les complexes $\dfrac{1}{k\pi}$ $(k\in\mathbb{Z}_0)$ sont des singularités isolées mais pas 0.

6. (a) $\displaystyle\int_\gamma \Re z\ dz = i\pi$

(b) $\displaystyle\int_\gamma e^{z^2}\ dz = 0$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-2}\ dz = 0$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\ dz = 2i\pi$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-\frac{i}{2}}\ dz = 2i\pi$

(f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\ dz = 2i\pi\cos\left(\frac{1}{2}\right)$

7. (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\ dz = -4\pi$

   (b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2} f(z)\ dz = 0$

   (c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_3} f(z)\ dz = 4\pi$

   (d) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_4} f(z)\ dz = 0$

8. (a) Comme $(1+i)^i \in \Omega = \mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$, on a $\mathrm{Ln}\left[(1+i)^i\right] = -\dfrac{\pi}{4} + i\ln(\sqrt{2})$.

   (b) La fonction f est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}\setminus\left(\{iy\ :\ y \geq 1\} \cup \{iy\ :\ y \leq -1\}\right)$.

   (c) Si $x \in \mathbb{R}$, il vient $if(x) = -2\arctan x$.

9. (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} f_1(z)\ dz = i\pi$

   (b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2} f_2(z)\ dz = i\pi$

   (c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_3} f_3(z)\ dz = \frac{\pi}{4}\,(2\ln 2 + i\pi)$

   (d) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_4} f_4(z)\ dz = 0$

10. Utiliser $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et remplacer l'intégrale par une intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ où γ est le chemin $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

    La valeur de l'intégrale est $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

11. La réponse est non (utiliser, par exemple, le théorème de Liouville).

12. La proposition est fausse car (par exemple)

$$\lim_{y\to\infty,\, y\in\mathbb{R}} f(iy) = \lim_{y\to\infty,\, y\in\mathbb{R}} e^{y^2} = +\infty$$

13. Utiliser, par exemple, la représentation intégrale de Cauchy.

14. Utiliser le théorème de Liouville.

15. (a) Il s'agit de trouver une fonction v de classe C_2 telle que

$$\begin{cases} D_x v = -D_y u \\ D_y v = D_x u \end{cases}$$

ce qui signifie que l'on doit trouver v tel que $\operatorname{grad} v = [f_1, f_2]$ avec $f_1 = -D_y u$ et $f_2 = D_x u$.

Les fonctions f_1 et f_2 vérifient les égalités croisées mais on sait que cette condition n'est pas suffisante à l'existence d'un tel v (par exemple, avec $u(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $f_1(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_2(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $\Omega = \mathbb{C}_0$).

(b) Une condition suffisante pour assurer l'existence d'un conjugué harmonique est que l'ouvert Ω soit simplement connexe (en particulier étoilé).

(c) -

(d) Dans l'exemple proposé, si on considère l'ouvert Ω comme étant $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite d'origine 0, v est une détermination de la fonction argument, à une constante additive près.

3.3.5 Exercices proposés dans la section (3.2.5)

1. (a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} m!\, z^m$ converge uniquement en 0.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$ converge sur $\mathbb{C}$.

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-i)^{2m}}{m^3}$ converge sur $\{z\in\mathbb{C} \ :\ |z-i|<1\}$.

(d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^m}{2^m\,(m!)^2}$ converge sur $\mathbb{C}$.

(e) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} 4^m \ (z-2)^m$ converge sur $\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(f) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \ (iz-1)^m$ converge sur $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| < 1\}$.

2. (a) $\dfrac{1}{z^2+1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \, z^{2m}$ pour $|z| < 1$.

(b) $\dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \, (z-1)^m$ pour $|z-1| < 1$.

(c) $\dfrac{z}{z^2-1} = -\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} z^{2m+1}$ pour $|z| < 1$.

(d) $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \left(-1 + \frac{(-1)^m}{2^m}\right) z^m$ pour $|z| < 1$.

(e) $\dfrac{1}{1+z+z^2} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \, z^m$ pour $|z| < 1$ avec

$$a_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est un multiple de 3,} \\ -1 & \text{si } m-1 \text{ est un multiple de 3,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(f) $\dfrac{\sin z}{z} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \, z^{2m}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

(g) $\dfrac{1-\cos z}{z^2} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} \, z^{2m}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

(h) $\dfrac{e^z}{1-z} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(m-j)!}\right) z^m$ pour $|z| < 1$.

3. -

4. S est holomorphe dans $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ et F est holomorphe dans le complémentaire de $\{1\}$.
   Les fonctions sont égales dans B.
   En exprimant cette égalité en $z = \frac{1}{2}$, on obtient que la somme mentionnée vaut 6.

5. (a) Le disque de convergence de S_1 est $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ et, sur ce disque,

$$S_1(z) = -\mathrm{Ln}\,(1-z)$$

(b) Le disque de convergence de S_2 est B également et on a

$$S_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad S_2(z) = 1 + (1-z)\,\frac{\mathrm{Ln}\,(1-z)}{z} \;\text{ si }\; 0 < |z| < 1$$

6. Si $\Re f$ est borné dans $\mathbb{C}$ alors la fonction e^f est entière et également bornée dans $\mathbb{C}$; elle est donc constante.
   Il s'ensuit que $\left|e^f\right| = e^{\Re f}$ est constant donc aussi $\Re f = \ln\left(e^{\Re f}\right)$.
   Cela étant, $\Im f$, fonction à valeurs réelles, apparaît comme une combinaison linéaire de fonctions entières ; elle est donc constante aussi.

   On procède de manière analogue si c'est $\Im f$ qui est borné.

7. La fonction $F\ :\ z \mapsto \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^p}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω.
   Par le principe du maximum dans un ouvert borné, pour z tel que $|z-z_0| \le r$, on a

$$|F(z)| \le \sup_{\{u\,:\,|u-z_0|=r\}} |F(u)| = r^{-p} \sup_{\{u\,:\,|u-z_0|=r\}} |f(u)|$$

   donc

$$|f(z)| \le \frac{|z-z_0|^p}{r^p} \sup_{\{u\,:\,|u-z_0|=r\}} |f(u)|$$

8. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $g(z_0) \neq 0$ alors, par continuité, g reste différent de 0 en tout point d'un voisinage de z_0.
   La fonction f est donc identiquement nulle dans ce voisiange et, par suite, dans le connexe Ω.

3.3.6 Exercices proposés dans la section (3.2.6)

1. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $g(z_0) \neq 0$ alors, par continuité, g reste différent de 0 en tout point d'un voisinage de z_0.
   La fonction $\bar{f} = \dfrac{F}{g}$ est donc holomorphe dans un voisinage ouvert de z_0.
   Il s'ensuit que $\Re f$ et $\Im f$ sont holomorphes dans ce voisinage, donc constants dans celui-ci ; dès lors f y est aussi constant.
   Comme l'ouvert Ω est connexe, f reste constant dans l'ouvert tout entier.

2. La fonction $z \mapsto f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe[3] dans Ω et nulle si $z \in]0, +\infty[$; elle est donc nulle dans Ω.
   De $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\forall\, z \in \Omega$, on déduit directement $f(x) = \overline{f(\bar{x})} = \overline{f(x)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. La fonction $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est bien définie dans l'ouvert Ω puisque $\bar{z} \in \Omega$ lorsque $z \in \Omega$. Cela étant, on a directement

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{C}} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{C}} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}+\overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} = \overline{(Df)(\overline{z})}.$$

3. (a) – Faux : avec $\Omega = \mathbb{C}_0$ et $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, on obtient $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2i\pi$.
   – Vrai : si $\gamma \ : \ [a,b] \ \to \ \Omega$ est un chemin de classe C_1, le calcul direct donne $\displaystyle\int_\gamma Df(z)\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$; cette expression est donc nulle si γ est fermé.

   (b) – Vrai : si z_0 est un zéro d'ordre p pour f alors il existe une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0, non nulle en z_0, telle que $f(z) = (z - z_0)^p\, g(z)$ au voisinage de z_0 ; la fonction $F \ : \ z \mapsto \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^p}$ admet donc g comme prolongement holomorphe.
   – Vrai : comme la fonction g introduite ci-dessus est non nulle en z_0, elle reste non nulle au voisinage de z_0 et $\dfrac{1}{g}$ prolonge donc $\dfrac{1}{F} \ : \ z \mapsto \dfrac{(z - z_0)^p}{f(z)}$.

   (c) Faux : à justifier en utilisant (a).

4. Supposons que p_j soit l'ordre de z_j comme pôle pour f.
   La fonction
   $$F \ : \ z \mapsto \Pi_{j=1}^{J} (z - z_j)^{p_j}\, f(z)$$
   admet alors une limite finie en chaque z_j ; elle se prolonge donc en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.
   Par ailleurs, vu l'hypothèse faite sur f, il existe $C > 0$ tel que
   $$|F(z)| \leq C \left(1 + |z|^{p+p_1+\ldots+p_J}\right), \ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$
   En utilisant le théorème de Liouville, on en déduit que F est un polynôme et, par suite, que f est une fraction rationnelle.

5. (a) f_1 est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$;
   ses singularités isolées sont $-i$ et i ;
   $-i$ et i sont des pôles d'ordre 2.

   (b) f_2 est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$;
   0 est sa seule singularité isolée ;
   c'est un pôle d'ordre 2.

   (c) f_3 est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$;
   0 est sa seule singularité isolée ;
   c'est une singularité essentielle.

   (d) f_4 est holomorphe dans $\mathbb{C}_0 \setminus \left\{ \dfrac{1}{k\pi} \ : \ k \in \mathbb{Z}_0 \right\}$;
   0 est une singularité non isolée de f_4 ;
   pour tout $k \in \mathbb{Z}_0$, $\dfrac{1}{k\pi}$ en est une singularité isolée de type pôle d'ordre 1.

   (e) f_5 est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$;
   pour tout k, $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ est en une singularité isolée de type pôle d'ordre 1.

(f) f_6 est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$;
les singularités isolées de f_6 sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$;
si θ n'est pas un multiple entier de π, $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont deux pôles d'ordre 1 ;
si θ est un multiple de π, alors $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ est un pôle d'ordre 2.

(g) f_7 est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et se prolonge en une fonction entière ;
f_7 n'admet donc aucune singularité isolée.

(h) f_8 est holomorphe dans $\mathbb{C}_0 \setminus]-\infty, -1]$ et se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$;
f_8 n'admet donc aucune singularité isolée.

(i) f_9 est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$;
0, 1 et -1 sont des singularités isolées de f_9 ;
chacune de ces singularités est un pôle d'ordre 1.

(j) f_{10} est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$;
0 et 1 sont des singularités isolées de f_{10} ;
0 est une singularité essentielle tandis que 1 est un pôle d'ordre 1.

(k) f_{11} est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$;
0 est sa seule singularité isolée ;
c'est une singularité essentielle.

(l) f_{12} est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$;
0 est sa seule singularité isolée ;
c'est un pôle d'ordre 1.

6. -

7. (a) f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$;
0, i et $-i$ sont des singularités de f ;
0 est une singularité essentielle tandis que i et $-i$ sont des pôles d'ordre 1.

(b) On a

$$\int_{\gamma_r} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = \int_{\gamma_r} \frac{e^z}{1+z^2} dz$$

L'intégrale est donc nulle si $r < 1$ (utiliser l'invariance par homotopie).
Si $r > 1$, en décomposant $\dfrac{1}{1+z^2}$ en une somme de fractions simples et en utilisant la représentation de Cauchy, on trouve que l'intégrale est égale à $2i\pi \sin 1$.

(c) Pour $r > 0$, on pose $\gamma_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.
Soit $0 < r < 1$. On a (en revenant à la définition par les paramétrages)

$$a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{ze^{1/z}}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{1/r}} \frac{e^z}{z(1+z^2)} dz$$

Le théorème des résidus (ou une décomposition de la fraction $\dfrac{1}{z(1+z^2)}$ en fractions simples et l'utilisation de la représentation intégrale de Cauchy) condui(sen)t au résultat $a_0 = 1 - \cos 1$.
On peut aussi remarquer que a_0 est le résidu en zéro de la fonction

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z} = \frac{z}{1+z^2}\, e^{1/z}$$

et obtenir la valeur de a_0 en déterminant le coefficient adéquat dans le développement en série de Laurent de cette fonction.
On procède de la même manière pour $a_{-1} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$; on trouve $a_{-1} = 1 - \sin 1$.

8. -

3.3.7 Exercices proposés dans la section (3.2.7)

1. $\mathrm{Res}_i\, f_1 = -\dfrac{i}{4}, \quad \mathrm{Res}_{-i}\, f_1 = \dfrac{i}{4}$

   $\mathrm{Res}_0\, f_2 = 0$

   $\mathrm{Res}_0\, f_3 = 1$

   $\mathrm{Res}_{\frac{1}{k\pi}}\, f_4 = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2}, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}_0$

   $\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}+k\pi}\, f_5 = -1, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$

   $\mathrm{Res}_{e^{i\theta}}\, f_6 = -\dfrac{i}{2\sin\theta}, \quad \mathrm{Res}_{e^{-i\theta}}\, f_6 = \dfrac{i}{2\sin\theta}$ si $\theta \neq k\pi$; sinon, le résidu est nul.

   f_7 n'a pas de vraie singularité, ni en i ni en $-i$; le résidu est donc nul.

   f_8 n'a pas de vraie singularité en 0 ; le résidu est donc nul.

   $\mathrm{Res}_0\, f_9 = 1, \quad \mathrm{Res}_1\, f_9 = -\dfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Res}_{-1}\, f_9 = -\dfrac{1}{2}$

   $\mathrm{Res}_1\, f_{10} = -e, \quad \mathrm{Res}_0\, f_{10} = e - 1$

   $\mathrm{Res}_0\, f_{11} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!(m+1)!} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\cos t}\cos t\ dt$

   $\mathrm{Res}_0\, f_{12} = 1$

2. (a) La fonction f_1 admet deux pôles d'ordre 1 en $z = \pm 2i$ et $\mathrm{Res}_{\pm 2i}\, f_1 = \mp\dfrac{i}{4}$.

   (b) La fonction f_2 admet un pôle d'ordre 6 en $z = 0$ et $\mathrm{Res}_0\, f_2 = 0$.

   (c) La fonction f_3 admet un pôle d'ordre 5 en $z = 0$ et $\mathrm{Res}_0\, f_3 = \dfrac{1}{120}$.

(d) La fonction f_4 admet deux pôles d'ordre 1 en $z = 0$ et $z = 1$; $\mathrm{Res}_0\ f_4 = -1$ et $\mathrm{Res}_1\ f_4 = 2$.

(e) La fonction f_5 admet des pôles d'ordre 1 en $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Res}_{k\pi}\ f_5 = 1,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

(f) La fonction f_6 admet des pôles d'ordre 1 en $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}+k\pi}\ f_6 = (-1)^{k+1},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

(g) La fonction f_7 admet deux pôles d'ordre 2 en $z = \pm 1$ et $\mathrm{Res}_{\pm 1}\ f_7 = \mp\dfrac{1}{4}$.

(h) La fonction f_8 admet quatres pôles d'ordre 1 en $z = \pm 1$ et $z = \pm i$; $\mathrm{Res}_{\pm 1}\ f_7 = \pm\dfrac{1}{12}$ et $\mathrm{Res}_{\pm i}\ f_8 = \pm\dfrac{i}{12}$.

(i) La fonction f_9 admet des pôles d'ordre 1 en $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}+k\pi}\ f_9 = -1,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

(j) La fonction f_{10} admet quatres pôles d'ordre 1 en $z = \pm 1$ et $z = \pm i$; $\mathrm{Res}_{\pm 1}\ f_{10} = \pm\dfrac{1}{4}$ et $\mathrm{Res}_{\pm i}\ f_{10} = \mp\dfrac{i}{4}$.

3. (a) L'intégrale de f_1 sur $\mathcal{C}_1$ vaut $-\dfrac{i\pi^4}{3}$.

   (b) L'intégrale de f_2 sur $\mathcal{C}_2$ vaut $2i\pi$.

   (c) L'intégrale de f_3 sur $\mathcal{C}_3$ vaut $4i$.

   (d) L'intégrale de f_4 sur $\mathcal{C}_4$ vaut $-4i$.

   (e) L'intégrale de f_5 sur $\mathcal{C}_5$ vaut $-8i$.

   (f) L'intégrale de f_6 sur $\mathcal{C}_6$ vaut $-4i\pi \sinh\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   (g) L'intégrale de f_7 sur $\mathcal{C}_7$ vaut $2i\pi$.

   (h) L'intégrale de f_8 sur $\mathcal{C}_8$ vaut $-4i \sinh\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

   (i) L'intégrale de f_9 sur $\mathcal{C}_9$ vaut $-\dfrac{2\pi}{3}$.

   (j) L'intégrale de f_{10} sur $\mathcal{C}_{10}$ vaut 0.

   (k) L'intégrale de f_{11} sur $\mathcal{C}_{11}$ vaut $-4i\pi$.

   (l) L'intégrale de f_{12} sur $\mathcal{C}_{12}$ vaut $5i\pi$.

4. -

5. (a) Lintégrale vaut $2i\pi$

(b) L'intégrale vaut $-\dfrac{4i\pi}{7!}$.

(c) L'intégrale vaut $2i\pi$.

(d) L'intégrale vaut $2i\pi$.

(e) L'intégrale vaut $\dfrac{i\pi}{3}$.

6. (a) L'intégrale est nulle.

   (b) L'intégrale vaut $-\dfrac{\pi^2}{3} + i\pi \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

7. (a) L'intégrale est nulle.

   (b) L'intégrale vaut $2i\pi$.

8. L'intégrale vaut $-\dfrac{4i\pi}{(1+2i)^4}$.

9. (a) L'intégrale existe et vaut $\dfrac{2\pi}{3}$.

   (b) L'intégrale existe et vaut $\dfrac{\pi}{16}$.

   (c) L'intégrale existe et vaut $\dfrac{\pi}{3}$.

   (d) L'intégrale existe et vaut $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

   (e) Il s'agit en fait de l'intégrale Eulérienne B en des réels particuliers :

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \quad \text{avec} \quad a \in]0,1[.$$

Voici une résolution détaillée (le genre de contour utilisé ici l'est aussi pour calculer d'autres intégrales).

Par le changement de variable $y = \dfrac{x}{1-x}$, de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$, on a

$$B(a, 1-a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy.$$

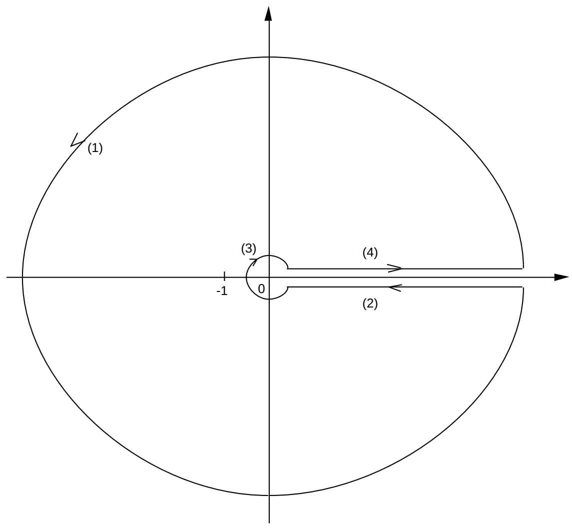
Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{z+1} = \frac{e^{a\,\mathrm{Log}_0(z)}}{z(z+1)}$$

holomorphe dans $\Omega_0 \setminus \{-1\}$ avec $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et le chemin $\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}$ formé par la juxtaposition des quatre chemins suivants :

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)}_{\varepsilon',R}(t) &= R\, e^{it}, & t &\in \left[\arctan\left(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{R^2-\varepsilon'^2}}\right),\ 2\pi - \arctan\left(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{R^2-\varepsilon'^2}}\right)\right]\\
\gamma^{(3)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(t) &= \varepsilon\, e^{-it}, & t &\in \left[\arctan\left(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}}\right),\ 2\pi - \arctan\left(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}}\right)\right]\\
\Gamma^{(4)}_{\varepsilon,\varepsilon',R}(t) &= t + i\varepsilon', & t &\in \left[\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2},\ \sqrt{R^2-\varepsilon'^2}\right]\\
\Gamma^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon',R}(t) &= (-\Gamma)(t), & &\text{où}\\
\Gamma(t) &= t - i\varepsilon', & t &\in \left[\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2},\ \sqrt{R^2-\varepsilon'^2}\right].
\end{aligned}$$

(ε, ε' et R désignent des réels tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1 < R$).



D'une part, comme le chemin $\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}$ est homotope à un chemin constant dans Ω_0, le théorème des résidus fournit

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)\, dz = 2i\pi \operatorname{Res}_{-1} f = -2i\pi\, e^{a \operatorname{Log}_0(-1)} = -2i\pi\, e^{ia\pi}.$$

D'autre part, calculons (dans l'ordre)

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)\, dz.$$

Regardons ce qui se passe pour l'intégrand sur les deux segments de droite : pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} \left[f(t+i\varepsilon') - f(t-i\varepsilon')\right] = \frac{e^{a\ln(t)} - e^{a\,[\ln(t)+2i\pi]}}{t(t+1)} = t^a \frac{1-e^{2ia\pi}}{t(t+1)}.$$

Dès lors, pour R et ε fixés, le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)\,dz = \left(1-e^{2ia\pi}\right)\int_{\varepsilon}^{R}\frac{t^a}{t(t+1)}\,dt + \int_{\gamma^{(3)}_{\varepsilon,0}} f(z)\,dz + \int_{\gamma^{(1)}_{0,R}} f(z)\,dz.$$

On a

$$\left|\int_{\gamma^{(3)}_{\varepsilon,0}} f(z)\,dz\right| \le 2\pi\varepsilon\,\frac{\varepsilon^a}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = 2\pi\,\frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon} \to 0 \quad \text{si } \varepsilon\to 0.$$

De même, on a

$$\left|\int_{\gamma^{(1)}_{0,R}} f(z)\,dz\right| \le 2\pi\,\frac{R^a}{R-1} \to 0 \quad \text{si } R\to+\infty.$$

Dès lors

$$-2i\pi\,e^{ia\pi} = \lim_{R\to+\infty}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)\,dz = \left(1-e^{2ia\pi}\right)\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{t(t+1)}\,dt$$

donc

$$B(a,1-a) = \frac{-2i\pi\,e^{ia\pi}}{1-e^{2ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

10. **Transformation de Joukowski**

La fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe dans le complémentaire de l'origine. De plus, $u = f(z)$ $(z\neq 0)$ est équivalent à $z^2-2uz+1=0$ (*).

On peut aussi noter que l'équation (*) en z (si u est complexe donné) possède deux solutions, notées z_1 et z_2 et que l'on a $z_1z_2=1,\ z_1+z_2=2u$.

• Montrons que l'image de $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|>1\}$ est incluse dans $V=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.
Soit $z\in\Omega$. Posons $u=f(z)$. Si $u\in[-1,1]$ alors l'équation (*) est telle que $\Delta=4(u^2-1)\le 0$, donc $z_{1,2}=u\pm i\sqrt{1-u^2}$ et $|z|=|z_1|=|z_2|=1$, ce qui est contradictoire.

• Montrons que $f\ :\ \Omega\to V$ est une bijection.
- *Injectivité.* Soient $z,z'\in\Omega$ tels que $u:=f(z)=f(z')$. Supposons $z=z_1$. On a $|z_1|=|z|>1$ donc $|z_2|=1/|z_1|<1$. Comme $z'\in\Omega$, on a donc nécessairement $z'=z_1$ également.
- *Surjectivité.* Soit $u\in V$. Cherchons $z\in\Omega$ tel que $u=f(z)$. Vu la forme (*) équivalente à cette dernière égalité, il suffit de montrer que l'une des solutions de (*) a un module strictement supérieur à 1. Si ce n'est pas le cas, on a $|z_1|\le 1$ et $|z_2|\le 1$ donc $|z_1|=|z_2|=1$ (car $z_1z_2=1$). Dans ce cas, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=e^{-i\theta}$, donc tel que $\frac{z_1+z_2}{2}=u=\cos\theta\in[-1,1]$, ce qui contredit $u\in V$.

• Forme explicite de l'inverse et holomorphie de celui-ci.
- On reprend l'équation (*), avec $u\in V$. On a $\Delta=4(u^2-1)$.
- Définissons une "racine carrée" de u^2-1 holomorphe dans V (laquelle sera notée $\sqrt{u^2-1}$). En considérant la détermination de l'argument dans $]-\pi,\pi[$, on définit $F_1\ :\ u\mapsto(z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}$ holomorphe dans le complémentaire du segment $[-1,+\infty[$; en considérant la détermination de l'argument dans $]0,2\pi[$, on définit $F_2\ :\ u\mapsto(z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}$ holomorphe dans le complémentaire du segment $]-\infty,1]$. Dans l'intersection de ces deux

ouverts, on a $F_1 = F_2$; on peut donc définir F dans l'union de ces deux ouverts, à savoir dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, par

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z) & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty[\\ F_2(z) & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 1] \end{cases}$$

Puisque F_1 et F_2 sont holomorphes dans les ouverts respectifs, la fonction F est holomorphe dans leur union, à savoir $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
- La résolution de l'équation (*) et l'étude de la surjectivité de f conduit aussi à l'égalité

$$\mathbb{C} \setminus [-1, 1] = V = \left\{u \in V \ : \ |u + \sqrt{u^2 - 1}| < 1\right\} \bigcup \left\{u \ : \in V \ |u + \sqrt{u^2 - 1}| > 1\right\}.$$

Comme V est connexe et que le second des deux ouverts de l'union précédente n'est pas vide puisqu'il contient $]1, +\infty[$, on obtient $V = \left\{u \in V \ : \ |u + \sqrt{u^2 - 1}| > 1\right\}$.
- En conclusion $F : V \to \Omega \quad u \mapsto u + \sqrt{u^2 - 1}$ est l'inverse de f et est holomorphe.

<u>Quelques remarques directes et compléments</u> à propos de la transformation de <u>Joukowski</u>. Voir aussi dans EK, chapitres 16-17 et, par exemple, à l'adresse

http ://www.mathcurve.com/courbes2d/joukowski/joukowski.shtml

– On a $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, ce qui indique notamment que l'image de $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ est aussi l'image de $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}$. Se rappeler aussi que l'image de $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ est $[-1, 1]$, que 1 et -1 sont les seuls points fixes de la transformation et que i et $-i$ sont les seuls complexes dont l'image est 0.
– Si on utilise la représentation des complexes en coordonnées polaires $z = re^{it}$ $(r > 0, t \in [0, 2\pi[)$, on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2}\left((r + \frac{1}{r}) \cos t + i(r - \frac{1}{r}) \sin t\right) \quad (1).$$

Ainsi,
- si $r = 1$, on a $f(z) = \cos t \in [-1, 1]$;
- si $r \neq 1$ est fixé, l'expression (1) montre que les complexes $f(z)$ sont situés sur une ellipse de foyers 1 et -1 dont l'excentricité augmente lorsque $r \to 1$;
- si $t \in [0, 2\pi[$ est fixé, l'expression (1) montre que l'image de la demi-droite de représentation polaire re^{it}, $r > 1$ est soit un demi-axe (annulation de $\sin t$ ou de $\cos t$), soit une branche d'hyperbole (foyers 1 et -1) dont l'excentricité est $1/\cos t$
- l'image d'un cercle passant par $(-1, 0)$ (ou par $(1, 0)$) est une courbe "en profil" d'aile d'avion (voir références)

Chapitre 4

Introduction à l'analyse de Fourier

4.1 RAPPELS THEORIQUES

4.1.1 Transformée de Fourier

La *transformée de Fourier* d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

On retrouve également les notations suivantes pour représenter la transformée de Fourier de f exprimée au point $\xi \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{F}f)(\xi), \quad \mathcal{F}_\xi f \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{x\to\xi}[f(x)]$$

(la dernière formulation est employée principalement si l'utilisation d'une variable est nécessaire pour exprimer la fonction f).

Dans certains cas, on parle *des* transformées de Fourier de f, à savoir de la transformée *positive* et de la transformée *négative* qui sont respectivement les fonctions

$$\mathcal{F}_\xi^+ f = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x)\,dx,\ \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\xi^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}_\xi^- f = \hat{f}(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\xi^+ f = \mathcal{F}_{-\xi}^- f = \hat{f}(-\xi).$$

Pour une dimension supérieure, la généralisation est la suivante : pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\mathcal{F}_\xi^\pm f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Signalons en particulier trois exemples fondamentaux dans lesquels on suppose $a > 0$:

$$\mathcal{F}_\xi^\pm\left(\chi_{]-a,a[}\right) = \begin{cases} 2\,\dfrac{\sin(a\xi)}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \\ 2a & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}^\pm\left(e^{-ax^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{-\frac{\xi^2}{4a}},\ \xi \in \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_{x\to\xi}^\pm\left(e^{-a|x|}\right) = \frac{2a}{a^2+\xi^2},\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Passons en revue quelques propriétés clés de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

1. **Théorème de Riemann-Lebesgue**

   Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}^\pm f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, bornée sur $\mathbb{R}^n$ et tend vers 0 à l'infini (par contre, $\mathcal{F}^\pm f$ n'est pas forcément intégrable sur $\mathbb{R}^n$).

2. **Transformée de Fourier et dérivation**

   (a) Si $f \in C_L(\mathbb{R})$ est une fonction telle que $D^\ell f \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, L\}$, alors on a

   $$\mathcal{F}_\xi^\pm\left(D^\ell f\right) = (\mp i\xi)^\ell\ \mathcal{F}_\xi^\pm f, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

   pour tout $\ell \in \{1, \ldots, L\}$.

   (b) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, L\}$, la fonction $x \mapsto x^\ell f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}^\pm f \in C_L(\mathbb{R})$ et on a

   $$D_\xi^\ell\left(\mathcal{F}_\xi^\pm f\right) = (\pm i)^\ell\ \mathcal{F}_{x\to\xi}^\pm\left(x^\ell f(x)\right), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

   pour tout $\ell \in \{1, \ldots, L\}$.

3. **Théorème du transfert**

   Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

   $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mathcal{F}_x^\pm g\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^\pm f\ g(x)\ dx.$$

4. **Théorème de Fourier**

   Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est tel que $\mathcal{F}^\pm f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

   $$\mathcal{F}_\xi^\mp\left(\mathcal{F}^\pm f\right) = (2\pi)^n f(\xi)$$

   pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et en tout point de continuité ξ de f.

4.1.2 Produit de convolution

Soient f et g des fonctions définies presque partout sur $\mathbb{R}^n$. On dit que f et g sont *convolables* si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$y \mapsto f(x-y)\, g(y)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, on appelle *produit de convolution* de f et g la fonction $f \star g$ définie presque partout sur $\mathbb{R}^n$ par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Le produit de convolution est commutatif et associatif.

Il y a un lien assez fort entre le produit de convolution et la transformée de Fourier.

Théorème
Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}^{\pm}_{\xi}(f \star g) = \mathcal{F}^{\pm}_{\xi} f \; \mathcal{F}^{\pm}_{\xi} g, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

4.1.3 Série trigonométrique de Fourier

Le cadre naturel du développement d'une fonction en série trigonométrique de Fourier est l'espace $L^2([a,b])$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Il s'agit de l'*espace des fonctions de carré intégrable* sur l'intervalle $[a,b]$. On peut y définir un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ déterminé par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in L^2([a,b]),$$

et, à partir de celui-ci, une norme $||.||$ déterminée par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}, \quad f \in L^2([a,b]).$$

On peut montrer que $L^2([a,b])$ est un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet (toute suite de Cauchy converge) dont la norme découle d'un produit scalaire.

Une base orthonormée de $L^2([a,b])$ est donnée par la suite de fonctions définies sur $[a,b]$ par

$$e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\, e^{\frac{2i\pi m x}{b-a}}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Théorème
Si $f \in L^2([a,b])$, on peut *développer f en série trigonométrique de Fourier* : on a

$$f = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_m \rangle\, e_m$$

où la convergence a lieu (en norme) dans $L^2([a,b])$ et aussi presque partout sur $[a,b]$, c'est-à-dire que

$$\lim_{M\to+\infty}\left\|\sum_{m=-M}^{M}\langle f,e_m\rangle\,e_m - f\right\| = \lim_{M\to+\infty}\sqrt{\int_a^b\left|\sum_{m=-M}^{M}\langle f,e_m\rangle\,e_m(x)-f(x)\right|^2 dx} = 0$$

et que

$$\lim_{M\to+\infty}\left|\sum_{m=-M}^{M}\langle f,e_m\rangle\; e_m(x)-f(x)\right| = 0$$

pour presque tout $x\in[a,b]$.

De plus, on a la *formule de Parseval* :

$$\|f\|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}|\langle f,e_m\rangle|^2.$$

Dans certaines situations pratiques, il est possible de préciser ces notions de convergence et aussi de connaître la relation qui existe entre les valeurs de f et la somme de la série de Fourier.

Théorème de Dirichlet

Si f est une fonction de classe C_1 par morceaux sur $[a,b]$, alors $f\in L^2([a,b])$ et on a

$$\lim_{M\to+\infty}\sum_{m=-M}^{M}\langle f,e_m\rangle\,e_m(x) = \begin{cases}\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{si } x\in\,]a,b[\\[2ex] \dfrac{f(a^+)+f(b^-)}{2} & \text{si } x\in\{a,b\}\end{cases}$$

en utilisant les notations suivantes :

$$f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t) \quad \text{et} \quad f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t).$$

Une autre base orthonormée (n'utilisant cette fois que des fonctions à valeurs réelles) est donnée par

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}},\quad u_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\cos\left(\frac{2\pi m x}{b-a}\right),$$
$$v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\sin\left(\frac{2\pi m x}{b-a}\right),\quad m\in\mathbb{N}_0.$$

Si $f\in L^2([a,b])$, on a alors

$$f = \langle f,u_0\rangle\,u_0 + \sum_{m=1}^{+\infty}\left[\,\langle f,u_m\rangle\,u_m + \langle f,v_m\rangle\,v_m\,\right]$$

où la convergence a lieu en norme dans $L^2([a,b])$ et aussi presque partout sur $[a,b]$. On a également

$$\|f\|^2 = |\langle f, u_0\rangle|^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[|\langle f, u_m\rangle|^2 + |\langle f, v_m\rangle|^2 \right]$$

ainsi que le théorème de Dirichlet.

4.2 EXERCICES PROPOSES

4.2.1 Transformée de Fourier et produit de convolution

1. Soit $a > 0$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction f donnée ci-dessous de deux manières différentes (par "méthode de variables complexes" et en utilisant le théorème de Fourier).
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

2. Déterminer la transformée de Fourier des fonctions f_j définies ci-après.
   (a) $f_1(x) = \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right)\chi_{[-a,a]}(x) \quad (a > 0)$
   (b) $f_2(x) = e^{-|x-1|}$
   (c) $f_3(x) = e^{2ix}\, e^{-|3x-1|}$
   (d) $f_4(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ -e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$,
   (e) $f_5(x) = x^2\, e^{-3|x|}$

   Ces transformées sont-elles bornées dans $\mathbb{R}$, intégrables (dans $\mathbb{R}$), de carré intégrable (dans $\mathbb{R}$) ?

3. Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad g(x) = e^{-x}\,\chi_{]0,+\infty[}(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) = x.$$
   (a) Montrer que le produit de convolution $f \star f$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.
   (b) Même question pour $g \star h$.

4. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g.

(b) Représenter le graphique des fonctions f, g et $f \star g$.

5. (a) Calculer si possible la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ où λ est une constante strictement positive.

   (b) Pour tout $\lambda > 0$, on pose
$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi\,(x^2+\lambda^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Montrer que, pour tous $a,\ b > 0$, on a $R_a \star R_b = R_{a+b}$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire que, pour tous $a,\ b > 0$, on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab}\frac{1}{a+b}.$$

6. Soient les réels a et b tels que $b > a > 0$. Calculer si possible
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,dx.$$

7. <u>Equation de la chaleur</u>
   Soit une fonction $u \in \mathrm{C}_2\,(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$ telle que, pour tout $t \geq 0$, les fonctions $x \mapsto u(x,t)$, $x \mapsto D_x\,u(x,t)$ et $x \mapsto D_x^2\,u(x,t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
   On suppose qu'il existe $U_1,\ U_2 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tels que [1] $|u(x,t)| \leq U_1(x)$ et $|D_t u(x,t)| \leq U_2(x)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
   Soit v une constante strictement positive.
   On suppose que u vérifie l'équation de la chaleur
$$D_t\,u(x,t) = v^2\,D_x^2\,u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$
   On pose
$$f(x) = u(x,0), \quad x \in \mathbb{R},$$
   et on définit la fonction F de telle sorte que, pour tout $t \geq 0$, $F(y,t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

   (a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie
$$D_t\,F(y,t) + v^2\,y^2\,F(y,t) = 0.$$

   (b) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a
$$F(y,t) = e^{-v^2y^2t}\,\mathcal{F}_y^-\,f.$$

   (c) En déduire finalement que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x + 2v\sqrt{t}y\right) e^{-y^2}\,dy.$$

1. Cette hypothèse est, par exemple, vérifiée pour les fonctions à variables séparées, *i.e.* pour les fonctions u de la forme $u(x,t) = a(x)\,b(t)$ où $a \in C_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ et $b \in C_2([0,+\infty[)$.

4.2.2 Espaces de Hilbert et séries de Fourier

1. (a) Montrer que, pour tout naturel strictement positif m, on a
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2m+1)x]}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$
   (b) En déduire que
$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

   Suggestion. Utiliser les propriétés des transformées de Fourier.

2. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit de carré intégrable, on pose
$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2\, |f(x)|^2\, dx.$$
   (a) Pour $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$, montrer que
$$\Delta_f = \sqrt{2\pi}.$$
   (b) En déduire l'égalité suivante (principe d'incertitude d'Heinsenberg dans le cas d'une Gaussienne)
$$\Delta_f \Delta_{\widehat{f}} = \pi^2$$
   pour $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$ ($\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier négative de f).

3. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact [2]. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\left|\widehat{f}(z)\right| \leq C\, e^{A|\Im z|},\ z \in \mathbb{C},$$
lorsque le support de f est inclus dans $[-A, A]$ $(A > 0)$.

4. (a) Soit une fonction $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact, non identiquement nulle [3]. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ appartient aussi à $C_\infty(\mathbb{R})$ mais qu'elle n'est pas à support compact.

   Suggestion. Utiliser le fait que $\widehat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.

   (b) Soit $a > 0$ et soit $g_a(x) = e^{-ax^2}$. Connaissant l'intégrale de Poisson et en utilisant des "méthodes de variables complexes", montrer que
$$\mathcal{F}_y^{\pm} g_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-y^2}{4a}}$$
   quel que soit $y \in \mathbb{R}$.

---

2. Le support d'une fonction supposée définie dans $\mathbb{R}$ est l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas. Son complémentaire est le plus grand ouvert d'annulation de f. Bien remarquer qu'une fonction peut être nulle en des points de son support.

3. Valable aussi pour f de carré intégrable et à support compact.

(c) Soit une fonction intégrable f dont le support est inclus dans $[0, +\infty[$. Montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}^+ f$ se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im z > 0\}$.

5. (a) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $L^2([-1,1])$.

   (b) Comparer les espaces $L^2([-1,1])$ et $L^1([-1,1])$ (vis-à-vis de l'inclusion).

   (c) Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\|f\|_{L^1([-1,1])} \leq C \|f\|_{L^2([-1,1])}, \quad \forall f \in L^2([-1,1]).$$

6. On définit la fonction Γ (intégrale eulérienne) par
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt, \quad x \in]0, +\infty[.$$

   (a) Montrer que cette définition a un sens (*i.e.* que $t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ quel que soit $x > 0$).

   (b) Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a
$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\ \Gamma(y)}.$$

   (c) Montrer que Γ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re z > 0\}$ et que l'on a $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ pour tout complexe z de partie réelle strictement positive.

7. On donne f, fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^-_{2\pi m} f\ e^{2i\pi m x}$$
en précisant dans quels espaces les convergences ont lieu.

   (b) En déduire que
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

8. On donne la fonction
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de cette fonction dans $L^2([-\pi,\pi])$ en simplifiant la réponse au maximum ; la réponse finale ne doit comporter que des fonctions sinus et cosinus.

(b) En déduire que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

9. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ de la fonction f définie par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

10. On se place dans $L^2([0,\pi])$.

   (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $f(x) = \sin^2 x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

   (b) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $g(x) = \sin x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

   (c) En déduire l'égalité suivante

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

11. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi,\pi])$ de la fonction $f(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi]$; exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

   (b) Déduire des calculs précédents que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. Dans l'espace $L^2([-1,1])$, on a le développement suivant :

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

4.3 SOLUTIONS

4.3.1 Exercices proposés dans la section (4.2.1)

1. $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(\dfrac{1}{x^2+a^2}\right) = \dfrac{\pi}{a}\, e^{-a|y|}$

2. (a) $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left[f_1(x)\right] = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\frac{ay}{2}\right)}{\left(\frac{ay}{2}\right)^2} & \text{si } \; y \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } \; y = 0 \end{cases}$

   (b) $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left[f_2(x)\right] = 2\,\dfrac{e^{-iy}}{1+y^2}$

   (c) $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left[f_3(x)\right] = 6\,e^{\frac{2i}{3}}\,\dfrac{e^{-\frac{iy}{3}}}{y^2-4y+13}$

   (d) $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left[f_4(x)\right] = \dfrac{(1-iy)^2}{(1+y^2)^2}$

   (e) $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left[f_5(x)\right] = 36\,\dfrac{3-y^2}{(9+y^2)^3}$

3. -

4. -

5. -

6. -

7. -

4.3.2 Exercices proposés dans la section (4.2.2)

1. Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=-m}^{m} e^{2ikx} = \frac{\sin[(2m+1)x]}{\sin x}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

donc aussi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2m+1)x]}{\sin x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-m}^{m} e^{2ikx}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2ikx} + e^{-2ikx}\right) dx \\
&= \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{(2m+1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2m+1)x]}{x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[(2m+1)x]\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) dx
\end{aligned}$$

Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la propriété de convergence vers 0 à l'infini des transformées de Fourier des fonctions intégrables [4] donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{m\to+\infty} \int_0^{\frac{(2m+1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \lim_{m\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[(2m+1)x]\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) dx \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

2. -

3. -

4. (a) Si f est dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}(f) \subset [a,b]$ alors, quel que soit le naturel m, la fonction

$$x \mapsto x^m f(x) = x^m\ \chi_{[a,b]}(x)\ f(x) = \left[x^m\ \chi_{[a,b]}(x)\right]\ f(x)$$

est intégrable dans $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de carré intégrable. Ainsi

$$\widehat{f}\ :\ y \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\,dx$$

est de classe C_∞ dans $\mathbb{R}$ (intégrales paramétriques) et, de même,

$$F\ :\ z = u + iv\ [= (u,v)]\ \in \mathbb{C}\ \left[= \mathbb{R}^2\right]\ \ \mapsto\ \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(u+iv)} f(x)\,dx$$

4. propriété appelée "théorème de Riemann-Lebesgue".

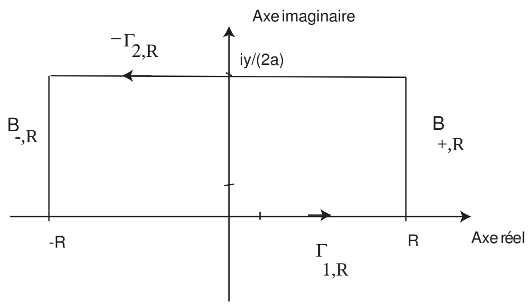
est de classe C_∞ dans $\mathbb{R}^2$ et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann $(D_u + iD_v)F = 0$. Il s'ensuit que F est holomorphe dans $\mathbb{C}$.
Cela étant, si $\widehat{f}$ est à support compact, alors $\widehat{f}(u) = F(u) = 0$ pour tout réel u suffisamment grand, donc F est indentiquement nul dans $\mathbb{C}$. Dès lors $\widehat{f}(u) = F(u) = 0$ pour tout réel u ; par le théorème de Fourier, f est nul [5].

Remarque. C'est dans la théorie des distributions que les fonctions de classe C_∞ à support compact prennent toute leur importance ("fonctions test"). En fait, une distribution est une fonctionnelle linéaire continue définie sur l'espace de ces fonctions. Quand on veut prolonger la théorie de Fourier au cas des distributions, on est amené à prendre la transformée de Fourier des fonctions test, puis à évaluer une distribution en cette transformée. Mais celles-ci n'appartiennent plus à l'espace des fonctions test (cf cet exercice) ! Ceci motive l'introduction des fonctions de la classe de Schwarz [6], plus large que celle des fonctions test. La transformée de Fourier d'une fonction de la classe de Schwarz est encore une fonction de ce type, ce qui permet d'élargir la théorie et d'étudier la transformation de Fourier de distributions.

(b) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} g_a &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, e^{-ax^2}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x^2+2x\frac{iy}{2a}\right)}\, dx \\
&= e^{-\frac{y^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{y}{2a}\right)^2} dx \\
&= e^{-\frac{y^2}{4a}} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+i\frac{y}{2a}\right)^2} dx \\
&= e^{-\frac{y^2}{4a}} \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_{2,R}} e^{-az^2} dz
\end{aligned}$$

avec la représentation/définition suivante de $\Gamma_{2,R}$ lorsque $y > 0$:



Désignons par γ_R la juxtaposition des chemins $\Gamma_{1,R}$, $B_{+,R}$, $-\Gamma_{2,R}$, $B_{-,R}$. Quel que soit $R > 0$, ce chemin est homotope à un chemin constant dans $\mathbb{C}$ et $z \mapsto e^{-az^2}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$; on a donc

$$\int_{\gamma_R} e^{-az^2} dz = 0, \quad \forall R > 0,$$

5. pp si on travaille dans L^2 et partout si on travaille avec des fonctions continues.
6. cet espace est l'ensemble des fonctions de classe C_∞ dans $\mathbb{R}$ qui sont uniformément bornées, ainsi que toutes leurs dérivées, après multiplication par un polynôme de n'importe quel degré.

ou

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{2,R}} e^{-az^2}dz &= \int_{\Gamma_{1,R}} e^{-az^2}dz + \int_{B_{+,R}} e^{-az^2}dz + \int_{B_{-,R}} e^{-az^2}dz\\ &= \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx + \int_{B_{+,R}} e^{-az^2}dz + \int_{B_{-,R}} e^{-az^2}dz.\end{aligned}$$

Cela étant, on a

$$\left|\int_{B_{+,R}} e^{-az^2}dz\right| = \left|\int_0^{\frac{y}{2a}} e^{-a(R+it)^2}\, i\, dt\right| \leq \int_0^{\frac{y}{2a}} e^{-a\left(R^2-t^2\right)}\, dt \leq C\, e^{-aR^2}$$

et de même pour l'intégrale sur $B_{-,R}$. Il s'ensuit que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{B_{+,R}} e^{-az^2}dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{B_{-,R}} e^{-az^2}dz = 0$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_y^{\pm} g_a &= e^{-\frac{y^2}{4a}}\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_{2,R}} e^{-az^2}dz\\ &= e^{-\frac{y^2}{4a}}\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx + \int_{B_{+,R}} e^{-az^2}dz + \int_{B_{-,R}} e^{-az^2}dz\right)\\ &= e^{-\frac{y^2}{4a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{y^2}{4a}}\end{aligned}$$

Si $y \leq 0$, alors $\mathcal{F}_y^{\pm} g_a = \mathcal{F}_{-y}^{\mp} g_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{y^2}{4a}}$. On conclut finalement que la formule annoncée est correcte quel que soit le réel y.

(c) On a $\mathcal{F}_y^{+} f = \int_0^{+\infty} e^{ixy} f(x)\, dx$, $y \in \mathbb{R}$. La fonction

$$F\ :\ z = u + iv\ [= (u,v)]\ \mapsto\ \int_0^{+\infty} e^{ix(u+iv)} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{ixu}\, e^{-vx} f(x)\, dx$$

est définie pour tout z tel que $v = \Im z \geq 0$, est de classe C_∞ dans

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \Im z > 0\}$$

et les dérivées partielles se calculent "sous le signe d'intégration" (utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétriques). Dès lors, comme $(D_u + iD_v)F = 0$ dans Ω, F y est holomorphe, comme annoncé dans l'énoncé.

5. Sur l'intervalle $[-1,1]$, on a $f = f\ \chi_{[-1,1]}$ de sorte que, si f est de carré intégrable sur $[-1,1]$, elle est aussi intégrable car elle s'écrit sous la forme du produit de deux fonctions de carré intégrable. Dès lors

$$L^2\left([-1,1]\right) \subset L^1\left([-1,1]\right).$$

L'inclusion est stricte car, par exemple, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ est intégrable sur $[-1,1]$ mais n'y est pas de carré intégrable.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx &= \left\langle\, |f|,\, \chi_{[-1,1]} \,\right\rangle \\ &\leq \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx}\,\sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \sqrt{2}\,\|f\|_2\end{aligned}$$

quelle que soit la fonction $f \in L^2([-1,1])$.
Remarquons que $C = \sqrt{2}$ est la plus petite constante que l'on puisse trouver telle que $\|f\|_1 \leq C\,\|f\|_2,\ \forall f \in L^2\left([-1,1]\right)$; de fait, pour $f = 1$, on a $\|f\|_1 = 2$ et $\|f\|_2 = \sqrt{2}$.

6. (a) Quel que soit $x > 0$, la fonction $f_x\ :\ t \mapsto e^{-t}\,t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et vérifie $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{\theta}\,f_x(t) = 1$, avec $\theta = 1 - x < 1$; $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\theta'}\,f_x(t) = 0$, avec $\theta' = 2 > 1$. Elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

   (b) On a successivement (en utilisant notamment l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2\left([0,+\infty[\right)$)

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{\frac{x+y}{2}-1}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{2}}\,t^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(e^{-\frac{t}{2}}\,t^{\frac{y-1}{2}}\right)dt \\ &\leq \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt}\,\sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{y-1}\,dt} \\ &= \sqrt{\Gamma(x)}\,\sqrt{\Gamma(y)}\end{aligned}$$

   (c) Une intégration par parties fournit directement

$$\Gamma(x+1) = -\int_0^{+\infty} \left(De^{-t}\right)t^x\,dt = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(xt^{x-1}\right)dt = x\,\Gamma(x), \quad x > 0.$$

   En utilisant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on obtient (cf autres exercices analogues) que la fonction $z \mapsto \Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$ est holomorphe dans l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \Re z > 0\}$. Ainsi, l'égalité

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),\ \forall\, z \in \mathbb{R},\ z > 0,$$

   se prolonge dans l'ouvert connexe Ω dans lequel les deux membres de l'égalité sont holomorphes.

7. (a) D'une part, les hypothèses faites sur f impliquent l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

il s'ensuit que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $R>0$ et $M_0 \in \mathbb{N}_0$ tels que

$$\sup_{x\in K} |f(x+m)| \leq \frac{R}{m^2},\ \forall m\ \in \mathbb{Z},\ |m| \geq M_0.$$

D'autre part, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, la fonction $f_M\ :\ x \mapsto \sum_{m=-M}^{M} f(x+m)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Dès lors la suite f_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $F(x) = \lim_{M\to+\infty} f_M(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m)$, F est continu sur $\mathbb{R}$ et est 1-périodique. Cela étant, le développement en série trigonométrique de F dans $L^2([0,1])$ est

$$F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} < F, u_m > u_m$$

où la convergnce a lieu dans $L^2([0,1])$, où $u_m(x) = e^{2i\pi mx}$ et

$$\begin{aligned}
\langle F, u_m\rangle &= \int_0^1 F(x)\,\overline{u_m(x)}\,dx\\
&= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)\,e^{-2i\pi mx}\,dx\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+k)\,e^{-2i\pi mx}\,dx \quad \text{(Lebesgue ou conv. unif.)}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(x)\,e^{-2i\pi mx}\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-2i\pi mx}\,dx \quad \text{(Lebesgue)}\\
&= \mathcal{F}^-_{2\pi m} f
\end{aligned}$$

(b) Pour obtenir la somme, on peut utiliser

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} \quad \text{(prol. cont. en 0)},\\
\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} &= \mathcal{F}^{\pm}_{y\to x}\left[\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{|y|}{2\pi}\right)\chi_{[-2\pi,2\pi]}(y)\right] \quad \text{(cf ex. 2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}^-_{2\pi m} f = \pi^2 \delta_{m0}$ et on conclut.

8. (a) Dans $L^2([-\pi,\pi])$ et $\forall x \in]-\pi, 0[\cup]0,\pi[$, on a

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2m+1)x]}{2m+1}$$

(b) La valeur de la somme est obtenue en utilisant le développement

$$\|f\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, u_m\rangle|^2$$

ou

$$\|f\|^2 = |\langle f, f_0\rangle|^2 + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \left(|\langle f, f_m\rangle|^2 + \langle f, g_m\rangle|^2 \right)$$

9. -

10. (a) On a immédiatement

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, u_0(x) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, u_1(x).$$

(b) Dans $L^2\left([0,\pi]\right)$ et pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}$$

(c) La somme est obtenue en prenant l'égalité précédente pour $x = \frac{\pi}{2}$.

11. (a) On a

$$x = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin(mx)}{m}$$

dans $L^2\left([-\pi,\pi]\right)$ et $\forall\, x \in \,]-\pi,\pi[$.

(b) La valeur de la somme est obtenue comme dans l'exercice 10.

12. -

Table des matières