ANALYSE III Liste pour le TD du 28 octobre 2014

Exercice 1. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur est transmise dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ (et, plus particulièrement, au point P donné) dans le cas où le champ est représenté par les fonctions scalaires ci-dessous.

$$T(x,y) = x^2 - y^2,\ P(2,1); \qquad T(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),\ P(2,2)$$

Esquisser les isothermes et les vecteurs unitaires qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

Exercice 2. 2.1) Soit la courbe du plan d'équation cartésienne $4x^2 + 8x + y^2 = 0$ dans un repère orthonormé. Représenter cette courbe et déterminer (si possible) la valeur des intégrales suivantes lorsque f est donné par $f(x,y) = y\ (x+1)$ en n'oubliant pas de préciser (dans les deux cas) s'il faut considérer la courbe orientée ou non orientée

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\ dx, \qquad \int_{\mathcal{C}} f\ ds$$

2.2) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x,\ x \in [0,1]\right\}$ et en donner une représentation dans un repère orthonormé.

2.3) Soient $\vec{f}(x,y) = [x+y, -x]$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0, x \geq 0\}$.
- Montrer que $\vec{\gamma}(t) = [\sin t, \sin 2t]$ avec $t \in [0,\pi]$ est un paramétrage de Γ.
- Calculer $\int_{\Gamma^+} f_1 dx + f_2 dy$, sachant qu'une intégrale curviligne est indépendante du paramétrage pour autant qu'il soit injectif (sauf peut-être aux extrémités) et de classe C_1.

Exercice 3. Soient les réels a, b tels que $0 < a < b$. On pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{]0,+\infty[}(x)$$

3.1) Déterminer (si possible) l'expression explicite du produit de convolution de f et g en tout réel.

3.2) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f*g)(x)}{x} dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Suggestions: transformer $1/x$ en une intégrale ou utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Exercice 4. 4.1) Soient a, b réels tels que $a < b$ et soient $r, s \in \mathbb{R}$. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions $\chi_{[a,b]}$ et $x \mapsto e^{-r|x+s|}$. Au besoin, donner des précisions sur les paramètres a, b, r, s.

4.2) Sachant que $\mathcal{F}^{\pm} g_\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} g_{1/(4\sigma)}$ si $\sigma > 0$ et $g_\sigma(t) = e^{-\sigma t^2}$, déterminer la transformée de Fourier (-) de la fonction $x \mapsto x e^{-x^2/2}$.

4.3) Quel que soit le réel non nul a, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x\ (a^2+x^2)} dx$$

Exercice 5. Pour des compléments d'information sur cet exercice (contexte, applications), voir E. Kreyszig page 750 (et suivantes), à propos de la *théorie du potentiel.*

Quelques définitions

- Une fonction harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est une fonction à valeurs réelles de classe C_2 dans Ω et qui est annulée par le Laplacien dans l'ouvert.
- Le couple (u, v) de fonctions à valeurs réelles, dérivables dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, vérifient les équations de Cauchy-Riemann (forme réelle) dans cet ouvert lorsque l'on a

$$D_x u = D_y v \quad \text{et} \quad D_y u = -D_x v \qquad \text{dans l'ouvert.}$$

On dit que v est un conjugué harmonique de u dans l'ouvert.

5.1) Montrer que si u, v sont de classe C_2 dans un ouvert et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, alors elles sont harmoniques.
5.2) Soit $u(x, y) = x^2 - y^2 - y$. Montrer que u est harmonique dans le plan et en trouver un conjugué harmonique.

FB, October 12, 2014(V1:12/10/14)