

---

**ANALYSE II**Matière théorique pour l'examen de janvier 2014

---

**Compléments de calcul intégral, transformation de Fourier, produit de convolution**

1. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant la transformation de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$
2. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant le produit de convolution de deux fonctions

**Analyse vectorielle**

1. Définition de l'intégrale sur une courbe (resp. curviligne, sur une surface) d'une fonction à valeurs scalaires avec précision des notions qui sont utilisées (notion de courbe, surface, paramétrage, ...)
2. Qu'appelle-t-on champ irrotationnel? Qu'entend-on par "champ dérivant d'un potentiel scalaire"? Ces notions sont-elles liées? Comment?  
Énoncés et démonstrations dont il a été question au cours.
3. Énoncé de la formule de Green dans le plan (resp. de la formule de Gauss, de Stokes) avec précision des notions qui sont utilisées et d'hypothèses sous lesquelles elle est valable.

**Homotopie et intégrales curvilignes, sur une courbe, ...**

1. Définition de la notion d'homotopie entre deux chemins continus  $\vec{\gamma}, \vec{\gamma}' : [a, b] \rightarrow \Omega$  ( $\Omega$ =ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ). Énoncé et preuve du théorème d'invariance par homotopie relatif aux intégrales curvilignes.
2. Soit  $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$  une fonction vectorielle, de classe  $C_1$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Relier les propriétés suivantes (énoncés -avec hypothèses adéquates- et preuves faites au cours)
  - (1) Dans  $\Omega$ ,  $\vec{f}$  dérive d'un potentiel scalaire
  - (2) L'intégrale curviligne de  $\vec{f}$  le long d'un chemin à valeurs dans  $\Omega$  ne dépend que des extrémités de ce chemin
  - (3) Le rotationnel de  $\vec{f}$  est nul en tout point de  $\Omega$

**Fonctions (holomorphes) d'une variable complexe**

1. Intégrale curviligne  $\int_{\gamma} f(z)dz$ ; définition et propriétés générales.  
Énoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
2. Définition d'une fonction holomorphe. Caractérisation à l'aide de l'équation de Cauchy-Riemann.  
Énoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
3. Propriétés générales relatives aux fonctions holomorphes (composition, annulation, ...): énoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).  
Connaitre les fonctions holomorphes élémentaires, leurs propriétés et comment les utiliser.
4. La représentation intégrale de Cauchy pour les fonctions holomorphes. Énoncé et preuve.

5. Conséquences de la représentation intégrale de Cauchy:
  - dérivabilité ( $C_\infty$ ) d'une fonction holomorphe, holomorphie de ses dérivées partielles, représentation intégrale des dérivées
  - théorème de Liouville: caractérisation des fonctions entières avec bornation "polynomiale"
  - développement en série de puissances d'une fonction holomorphe (série de Taylor).
 Énoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
6. Séries de puissances: définition et propriétés. Énoncés.
7. Zéros d'une fonction holomorphe : définition, caractérisation.
  - Propriétés spécifiques relatives aux zéros de multiplicité  $p$  (de multiplicité finie  $p \in \mathbb{N}_0$ ) ou d'ordre infini (zéro identique).
  - Énoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
8. Théorème de Laurent: énoncé et parties de preuve faites au cours (unicité du développement et expression des coefficients du développement en série de puissances entières)
9. Singularités isolées (singularité de type pôle et singularité essentielle): définition, caractérisation (énoncés et preuves; ce qui a été fait ou suggéré au cours)
10. Résidus:
  - définition d'un résidu, calcul d'un résidu (expression explicite dans certains cas)
  - énoncé et preuve du "Théorème des résidus"

### **Espaces de Hilbert, bases orthonormées, cas des séries trigonométriques de Fourier**

1. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant
  - la définition et les propriétés générales d'un espace vectoriel avec norme et avec produit scalaire (espace normé, de Banach, pre-hilbertien, de Hilbert)
  - les suites orthonormées, suites orthonormées totales, propriétés de type "Pythagore, projection orthogonale"
  - le cas de l'espace  $L^2(A)$
  - les résultats relatifs aux séries trigonométriques de Fourier dans  $L^2([a, b])$