Analyse III

Matière théorique pour l'examen de janvier 2015

Compléments de calcul intégral, transformation de Fourier, produit de convolution

1. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$

2. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant le produit de convolution de deux fonctions

Analyse vectorielle

1. Définition de l'intégrale sur une courbe (resp. curviligne) d'une fonction à valeurs scalaires (resp. scalaires ou vectorielles) avec précision des notions qui sont utilisées (notion de courbe, paramétrage, ...).

Homotopie et intégrales curvilignes, sur une courbe, ...

1. Définition de la notion d'homotopie entre deux chemins continus $\vec{\gamma}, \vec{\gamma}' : [a, b] \to \Omega$ (Ω=ouvert de $\mathbb{R}^n$). Enoncé et preuve du théorème d'invariance par homotopie relatif aux intégrales curvilignes.

2. Soit $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$ une fonction vectorielle, de classe C_1 dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. Relier les propriétés suivantes (énoncés -avec hypothèses adéquates- et preuves faites au cours)
   (1) Dans Ω, $\vec{f}$ dérive d'un potentiel scalaire
   (2) L'intégrale curviligne de $\vec{f}$ le long d'un chemin à valeurs dans Ω ne dépend que des extrémités de ce chemin
   (3) Le rotationnel de $\vec{f}$ est nul en tout point de Ω

Fonctions (holomorphes) d'une variable complexe

1. Intégrale curviligne $\int_\gamma f(z)dz$; définition et propriétés générales.
   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).

2. Définition d'une fonction holomorphe. Caractérisation à l'aide de l'équation de Cauchy-Riemann.
   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).

3. Propriétés générales relatives aux fonctions holomorphes (composition, annulation, ...): énoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
   Connaître les fonctions holomorphes élémentaires, leurs propriétés et comment les utiliser.

4. La représentation intégrale de Cauchy pour les fonctions holomorphes. Enoncé et preuve.

5. Conséquences de la représentation intégrale de Cauchy:
   - dérivabilité (C_∞) d'une fonction holomorphe, holomorphie de ses dérivées partielles, représentation intégrale des dérivées
   - théorème de Liouville: caractérisation des fonctions entières avec bornation "polynomiale"
   - développement en série de puissances d'une fonction holomorphe (série de Taylor).

   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).

6. Séries de puissances: définition et propriétés. Enoncés.
7. Zéros d'une fonction holomorphe
   -définition, caractérisation.
   -propriétés spécifiques relatives aux zéros de multiplicité p (de multiplicité finie $p \in \mathbb{N}_0$) ou d'ordre infini (zéro identique).

   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
8. Théorème de Laurent: énoncé et petites propriétés démontrées au cours.
9. Singularités isolées (singularité de type pôle et singularité essentielle): définition, caractérisation (énoncés et preuves; ce qui a été fait ou suggéré au cours)
10. Résidus:
    - définition d'un résidu, calcul d'un résidu (expression explicite dans certains cas)
    - énoncé et preuve du "Théorème des résidus"

Espaces de Hilbert, bases orthonormées, cas des séries trigonométriques de Fourier

1. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant
   - la définition et les propriétés générales d'un espace vectoriel avec produit scalaire et norme associée (espace pre-hilbertien, de Hilbert)
   - les suites orthonormées, suites orthonormées totales, propriétés de type "Pythagore, projection orthogonale"
   - le cas de l'espace $L^2(A)$
   - les résultats relatifs aux séries trigonométriques de Fourier dans $L^2([a, b])$