NOM et Prénom : .... SECTION : ....

Le binôme de Newton

Pour tous réels[1] a, b et pour tout naturel strictement positif[2] N, on a

$$\boxed{(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} C_N^k a^k b^{N-k}}$$

La démonstration se fait par récurrence sur N.
Pour $N = 1$, l'égalité est vraie car

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 b^{1-0} + C_1^1 a = b + a.$$

Supposons à présent que l'égalité soit vraie pour $1, \ldots, N$ et démontrons-la pour $N+1$. On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{N+1} &= (a+b)\ (a+b)^N \\
&= (a+b)\ \left(\sum_{k=0}^{N} C_N^k a^k b^{N-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} C_N^k a^{k+1} b^{N-k} \ + \ \sum_{k=0}^{N} C_N^k a^k b^{N+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{N+1} C_N^{j-1} a^j b^{N+1-j} \ + \ \sum_{k=0}^{N} C_N^k a^k b^{N+1-k} \\
&= a^{N+1} \ + \ \sum_{j=1}^{N} C_N^{j-1} a^j b^{N+1-j} \ + \ \sum_{k=1}^{N} C_N^k a^k b^{N+1-k} \ + \ b^{N+1} \\
&= a^{N+1} \ + \ \sum_{i=1}^{N} \left(C_N^{i-1} + C_N^i\right) a^i b^{N+1-i} \ + \ b^{N+1} \\
&= a^{N+1} \ + \ \sum_{i=1}^{N} C_{N+1}^i a^i b^{N+1-i} \ + \ b^{N+1} \\
&= C_{N+1}^0 b^{N+1} \ + \ \sum_{i=1}^{N} C_{N+1}^i a^i b^{N+1-i} \ + \ C_{N+1}^{N+1} a^{N+1} \\
&= \sum_{i=0}^{N+1} C_{N+1}^i a^i b^{N+1-i}.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion.

---

[1] La formule est aussi valable si a et b sont des complexes
[2] La formule est aussi valable pour $N = 0$ mais ne présente aucun intérêt.