Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Corrigé de l'interrogation de math du 5 novembre 2012

Version 6 novembre 2012

1. **(i) Quel est le domaine de définition de la fonction sinus ?**
(ii) Comment définit-on géométriquement le sinus du réel 6 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

Solution. Voir cours.

2. **A partir de la définition de la fonction tangente et des propriétés des fonctions sinus et cosinus, montrer que la valeur de la tangente de la somme de deux réels a et b est donnée par**
$$\frac{\mathrm{tg}(a)+\mathrm{tg}(b)}{1-\mathrm{tg}(a)\ \mathrm{tg}(b)}$$
pour autant que les réels dont on considère la tangente soient dans le domaine de définition de cette fonction et que le dénominateur de l'expression ci-dessus ne s'annule pas.

Solution. Si l'expression est définie, vu que $\mathrm{tg}(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ si $x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$, on a
$$\frac{\mathrm{tg}(a)+\mathrm{tg}(b)}{1-\mathrm{tg}(a)\ \mathrm{tg}(b)}=\frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\ \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}=\frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\mathrm{tg}(a+b)$$
si on réduit au même dénominateur puis qu'on multiplie numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$.

3. **Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[\pi,2\pi]$, résoudre l'équation**
$$\sin(2x)=\sin(x)$$

Solution. L'équation est équivalente à
$$(2x=x+2k\pi \text{ ou } 2x=\pi-x+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}))\Leftrightarrow(x=2k\pi \text{ ou } 3x=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}))$$
$$\Leftrightarrow x=2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$$
Les solutions dans $[\pi,2\pi]$ sont donc π, $\frac{5\pi}{3}$ et 2π.

4. **Dans une base orthonormée $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$, on considère 2 vecteurs $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}-2\overrightarrow{e_3}$. Déterminer les composantes**
a) de la projection orthogonale de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$
b) du produit vectoriel $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$.

Solution. Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ont respectivement pour composantes $(2,0,-1)$ et $(1,-3,-2)$.
a) Dès lors,
$$\overrightarrow{b}\bullet\overrightarrow{a}=2+0+2=4 \text{ et } ||\overrightarrow{a}||^2=2^2+(-1)^2=5$$
et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$ sont $\dfrac{4}{5}(2,0,-1)=\left(\dfrac{8}{5},0,-\dfrac{4}{5}\right)$.
b) Les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$ sont données par $(-3,-1+4,-6)=(-3,3,-6)$.

5. **Déterminer les solutions réelles (x) de l'équation suivante**
$$(x+1)\ |x+1|\ +\ 2x\ =\ -3$$

Solution. Si $x \leq -1$, l'équation s'écrit $(x+1)(-x-1)+2x+3=0 \Leftrightarrow -x^2+2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}$. Comme $x \leq -1$, la seule solution dans ce cas est $x=-\sqrt{2}$.

Si $x \geq -1$, l'équation s'écrit $(x+1)(x+1)+2x+3=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2$. Comme $x \geq -1$, cette solution doit être rejetée.

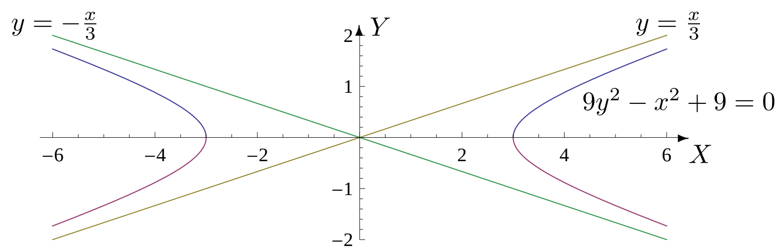
Dès lors, la solution de l'équation $(x+1)\ |x+1|\ +\ 2x\ =\ -3$ est $-\sqrt{2}$.

6. **On se place dans un repère orthonormé et on considère les équations cartésiennes suivantes**

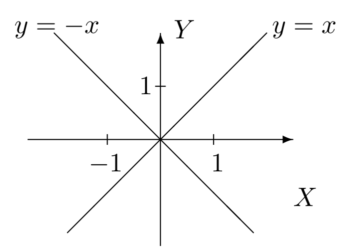
$$(1)\ 9y^2-x^2+9=0 \qquad (2)\ y^2=x^2 \qquad (3)\ 4x^2+y^2-4=0$$

Représenter graphiquement l'ensemble des points que ces équations déterminent ; chaque représentation doit être faite dans un repère différent. S'il s'agit de coniques, en préciser le type et l'excentricité.

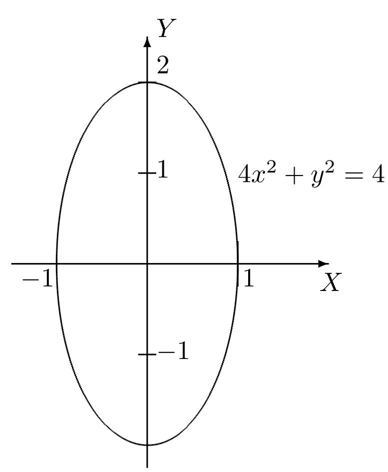
Solution. (1) L'équation $9y^2-x^2+9=0$ est celle d'une hyperbole dont l'excentricité vaut $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ et dont voici la représentation graphique



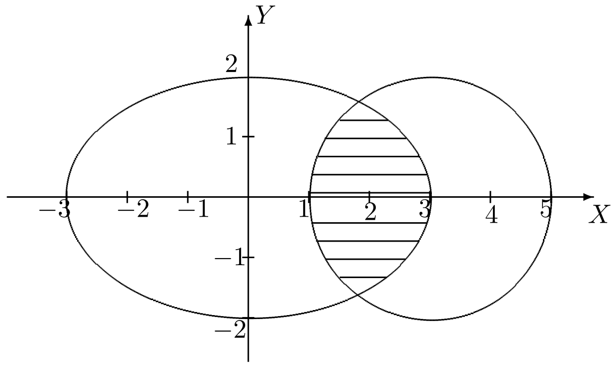
(2) L'équation $y^2=x^2$ est celle des deux bissectrices des axes du repère ; en voici la représentation graphique



(3) L'équation $4x^2+y^2-4=0$ est celle d'une ellipse dont l'excentricité vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et dont voici la représentation graphique



7. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré.**



L'ellipse a pour équation cartésienne $4x^2 + 9y^2 = 36$ et le cercle centré au point de coordonnées $(3, 0)$ et de rayon 2 a pour équation cartésienne $(x - 3)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 36,\ x^2 + y^2 - 6x + 5 \leq 0\}.$$

8. **Les longueurs des côtés d'un champ rectangulaire sont dans le rapport de 3 à 16. Si on diminue de moitié chacune de ces longueurs, l'aire du champ est égale à** $1200\ m^2$**. Déterminer (en mètres) les longueurs des côtés de ce champ.**

Solution.
Données : champ rectangulaire dont les longueurs des côtés sont dans le rapport de 3 à 16
l'aire du champ vaut $1200\ m^2$ si les dimensions de ce rectangle sont divisées par 2
Inconnues : les longueurs des côtés de ce champ

Soient L la longueur de la longueur et l la longueur de la largeur de ce champ en mètres. On a alors le système

$$\begin{cases} \frac{l}{L} = \frac{3}{16} \\ \frac{L}{2} \cdot \frac{l}{2} = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{3L}{16} \\ L \cdot \frac{3L}{16} = 4800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{3L}{16} \\ L^2 = 16 \cdot 1600 \end{cases}$$

Comme L et l sont des grandeurs strictement positives, on a $L = 160$ et $l = 30$. Ainsi la longueur de ce champ mesure 160 mètres et sa largeur mesure 30 mètres.