Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Mathématiques générales (partim B)

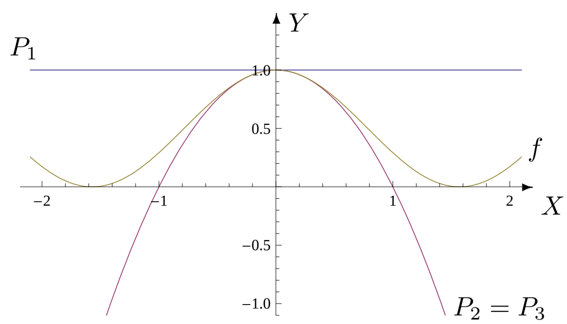
Corrigé de l'examen à blanc pour les géologues

Version 18 avril 2013

$\boxed{\textit{Exercices}}$

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = \cos^2 x.$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2, 3$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$Df(x) = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x) \quad D^2f(x) = -2\cos(2x) \text{ et } D^3f(x) = 4\sin(2x).$$
Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$, $D^2f(0) = -2$ et $D^3f(0) = 0$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - x^2$$
et
$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{D^3f(0)}{6!}x^3 = 1 - x^2, \ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) Soient un réel a et une matrice**
$$A = \begin{pmatrix} \sin(a) & \sin(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{pmatrix}.$$
- Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice est-elle inversible ? Justifier.
- Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si
$$\det A = \sin(a)\cos(2a) - \sin(2a)\cos(a) = \sin(a - 2a) = -\sin(a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$
Ainsi, la matrice A est inversible pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

La matrice des cofacteurs de A étant égale à
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(2a) & -\cos(a) \\ -\sin(2a) & \sin(a) \end{pmatrix},$$
l'inverse de A est la matrice
$$A^{-1} = \frac{-1}{\sin(a)} \begin{pmatrix} \cos(2a) & -\sin(2a) \\ -\cos(a) & \sin(a) \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

et on a

$$\begin{aligned}
A.A^{-1} &= \frac{-1}{\sin(a)}\begin{pmatrix} \sin(a) & \sin(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(2a) & -\sin(2a) \\ -\cos(a) & \sin(a) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sin(a)}\begin{pmatrix} \sin(a)\cos(2a)-\sin(2a)\cos(a) & -\sin(a)\sin(2a)+\sin(a)\sin(2a) \\ \cos(a)\cos(2a)-\cos(a)\cos(2a) & -\sin(2a)\cos(a)+\sin(a)\cos(2a) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sin(a)}\begin{pmatrix} -\sin(a) & 0 \\ 0 & -\sin(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
- Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont 1 (double) et -1 (simple).

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-2y=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des constantes complexes non simultanément nulles.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

La matrice A est donc diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants. Une matrice S inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **a) On donne la fonction g par**

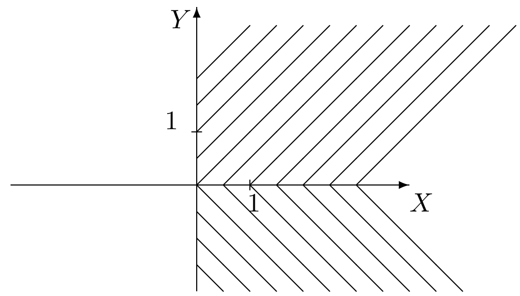
$$g(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction g est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ \frac{y^2}{x} > 0\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \neq 0\} =]0,+\infty[\times\mathbb{R}_0.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des axes sont exclus de l'ensemble.



- En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de g par rapport à sa première variable ? Simplifier votre réponse au maximum.

Solution. En un point de A, on a

$$D_x g(x,y) = D_Z \ln(Z)|_{Z=\frac{y^2}{x}} \ .\ D_x\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{x}{y^2}.\left(\frac{-y^2}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}.$$

On peut aussi écrire g sous la forme $g(x,y) = \ln(y^2) - \ln(x)$ puisque y^2 et x sont strictement positifs dans A. Dès lors, la dérivée est immédiate.

- Déterminer l'expression explicite de $F(t) = g\left(\frac{1}{t-1}, t-1\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.

Solution. L'expression explicite de F est donnée par $F(t) = \ln((t-1)^3)$ et son domaine de dérivabilité est l'ensemble

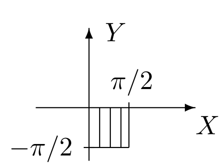
$$B = \{t \in \mathbb{R} : (t-1)^3 > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : t-1 > 0\} =]1,+\infty[.$$

En tout point de B, on a

$$DF(t) = \frac{3}{t-1}$$

b) Déterminer, si elle existe, l'intégrale $\iint_A \sin(2x+y)\ dx\ dy$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$ et représenter l'ensemble d'intégration

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(2x + y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(2x + y)\ dy \right)\ dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos(2x + y) \Big]_{y=-\frac{\pi}{2}}^{y=0}\ dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2x) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\ dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2x) - \sin(2x))\ dx \\ &= -\frac{1}{2} \Big[\sin(2x) + \cos(2x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\sin(\pi) + \cos(\pi) - \sin(0) - \cos(0)) = 1. \end{aligned}$$

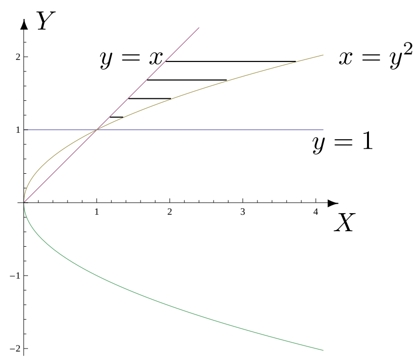
Puisque la fonction est intégrable sur A, on aurait pu calculer l'intégrale en permutant l'ordre d'intégration et on aurait obtenu le même résultat.

c) Calculer, si possible, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_y^{y^2} \frac{y}{x^4}\, dx \right)\ dy$$

et représenter son ensemble d'intégration.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ donc sur son ensemble d'intégration A, ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A$.
Pour y fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{y}{x^4}$ est continue sur le fermé borné $[y, y^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_y^{y^2} \frac{y}{x^4}\ dx = y\ .\ \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_y^{y^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^5}\right).$$

Etudions l'intégrabilité de $h : y \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^5}\right)$ en $+\infty$. Comme h est continu sur $[1, t]\ \forall t > 1$, on a

$$\int_1^t \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^5}\right)\ dy = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{y} + \frac{1}{4y^4}\right]_1^t = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t} + \frac{3}{4}\right).$$

Dès lors,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

et comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_x^{x^2} \frac{y}{x^4}\, dx \right)\ dy = \frac{1}{4}.$$