1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 5/11/2012 : correction

Version 26 octobre 2012

I. Problème élémentaire

1. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de 1/15. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 4,48 m^3 de glace ?** (cf. Nov 2008)

   Solution. On doit prendre 4 200 litres d'eau pour obtenir 4,48 m^3 de glace.

2. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient un point. S'il ne répond pas, il a 0 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire $0,25$ point. Sachant qu'il ne répond pas à 23 questions et qu'il obtient 49,5 comme cote finale, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?** (cf. Janv 2009)

   Solution. L'étudiant a donné 55 réponses correctes.

3. **Un tonneau rempli aux deux tiers d'eau pèse 145 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 156 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau ?** (cf. Oct 2009)

   Solution. La capacité du tonneau est égale à 1,32 hl.

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|x^2-1| = |3x|$ (cf. Nov 2007)
2. $x^2-4 \geq 3x\,|x-2|$ (cf. Oct 2006)
3. $x \geq 8x^4$ (cf. Nov 2007)
4. $|x-2| \geq |x+2|$ (cf. Janv 2008)
5. $(2-x)^2 \leq x-2$ (cf. Janv 2008)
6. $x|x^2-4| \leq |x-2|$ (cf. Janv 2009)
7. $\dfrac{|2-x|}{x^2-4} \geq |x-2|$ (cf. Oct 2008)

Solution. Si S est l'ensemble des solutions, on a

1. $S = \left\{ \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}$
2. $S = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \{2\}$
3. $S = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$
4. $S =]-\infty, 0]$
5. $S = [2, 3]$
6. $S =]-\infty, -1+\sqrt{2}] \cup \{2\}$
7. $S = [-\sqrt{5}, -2[\cup]2, \sqrt{5}]$

Calcul vectoriel et droites

1. **Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1, d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont**

$$d_1 : x-2y+3=0 \qquad d_2 : 2x+5y-12=0 \qquad d_3 : 4x+y-24=0.$$

(a) **Représenter ces 3 droites.**

(b) **Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A. Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par A et orthogonale à d_3.**

(c) **Donner des équations paramétriques de d_3.**

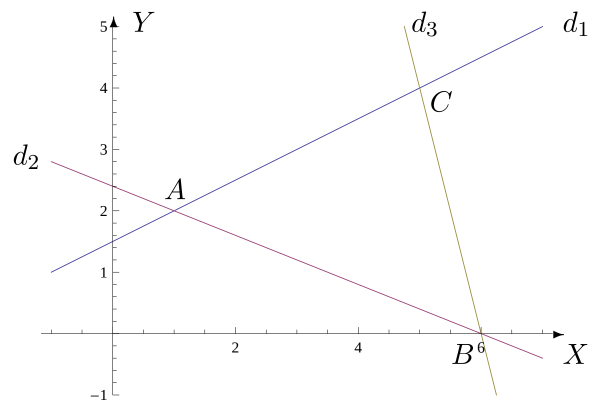
(d) **Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.**

(e) **Le point C de coordonnées $(5, 4)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?**

(f) **Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.**

(g) **Déterminer les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1.**

Solution. (a)



(b) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_1 et d_2, on obtient les coordonnées cartésiennes $(1, 2)$ de A. Comme le coefficient angulaire de d_3 vaut -4 le coefficient angulaire de toute droite orthogonale à d_3 vaut $\frac{1}{4}$. Dès lors, l'équation cartésienne demandée est $x - 4y + 7 = 0$.

(c) Un vecteur directeur de d_3 a pour composantes $(1, -4)$ et un point de d_3 a pour coordonnées $(6, 0)$. Dès lors, d_3 a, par exemple, pour équations paramétriques cartésiennes $\begin{cases} x = r + 6 \\ y = -4r \end{cases}, r \in \mathbb{R}.$

(d) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_2 et de l'axe des abscisses, on obtient les coordonnées cartésiennes $(6, 0)$ de B.

(e) En remplaçant x par 5 et y par 4 dans les équations des 3 droites, on constate que celles de d_1 et d_3 sont vérifiées mais non celle de d_2. Dès lors, le point C appartient à d_1 et d_3 mais non à d_2.

(f) Les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(4, 2)$ et $(-1, 4)$. Dès lors, le produit scalaire de ces 2 vecteurs vaut 4.

(g) Un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de d_1 a pour composantes $(2, 1)$ et le carré de sa norme vaut 5. Comme les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont égales à $(5, -2)$, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{v}$ vaut 8 et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1 sont $\frac{8}{5}(2, 1) = \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

2. **Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement**

$$(1, -1, 0) \qquad (-2, 1, 3) \qquad (0, 4, -2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$

Solution. Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(-3, 2, 3)$ et $(4, 6, -10)$. Dès lors, les composantes de $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$ sont $(-38, -18, -26)$.

Trigonométrie

1. **Si α désigne un réel de l'intervalle** $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ **et si** $\operatorname{cotg}(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$**, que valent les nombres** $\operatorname{tg}(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ **?** (cf. Oct 2009)

   Solution. On a $\operatorname{tg}(\alpha) = -\sqrt{2}$, $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.

2. **Simplifier** $\dfrac{\sin(\frac{5\pi}{3})}{\cos^2(\frac{7\pi}{3})}$ **.** (cf. Nov 2007)

   Solution. L'expression donnée vaut $-2\sqrt{3}$.

3. **Résoudre dans** $[0, 2\pi]$ **(**x **est une inconnue réelle)**
   (a) $\sin(x)\cos(x) = -1$ (cf. Janv 2009)
   (b) $4\sin(x)\cos(x) = -1$ (cf. Janv 2009)
   (c) $\sin(x) = \sin(3x)$ (cf. Oct 2009)
   (d) $4\sin^2(2x) = 3$ (cf. Août 2009)
   (e) $2\sin^2(2x) = \sin^2(4x)$ (cf. Janv 2010)
   (f) $\sin(x)\cos(2x) = \sin(2x)\cos(x) + \frac{1}{2}$ (cf. Mai 2010)

   Solution.
   (a) Cette équation est impossible.
   (b) Les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{19\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}$.
   (c) Les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, 2\pi$.
   (d) Les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{6}$.
   (e) Les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $0, \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}, \pi, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{13\pi}{8}, \dfrac{15\pi}{8}, 2\pi$.
   (f) Les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$.

Coniques

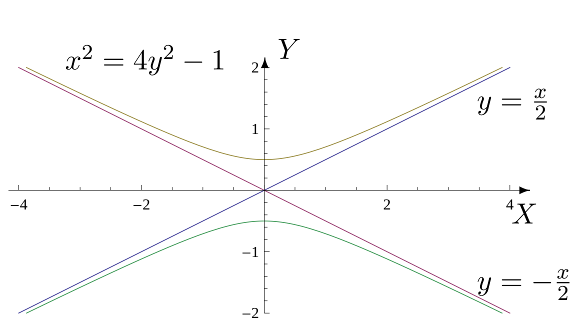
1. **On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne ? Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ?** (cf. Oct 2009)

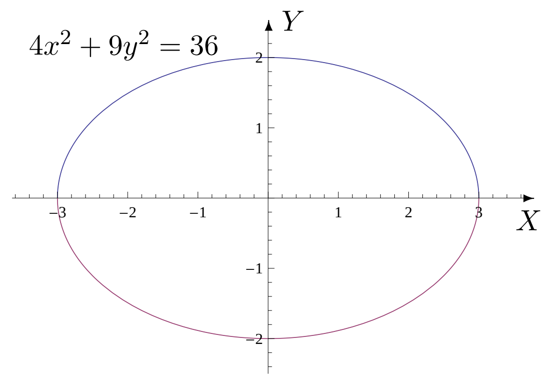
$$x^2 = 4y^2 - 1 \qquad\qquad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Solution. L'équation $x^2 = 4y^2 - 1$ est celle d'une hyperbole dont les foyers ont pour coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(0, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right)$ et pour excentricité $\sqrt{5}$.

L'équation $4x^2 + 9y^2 = 36$ est celle d'une ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$ et pour excentricité $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

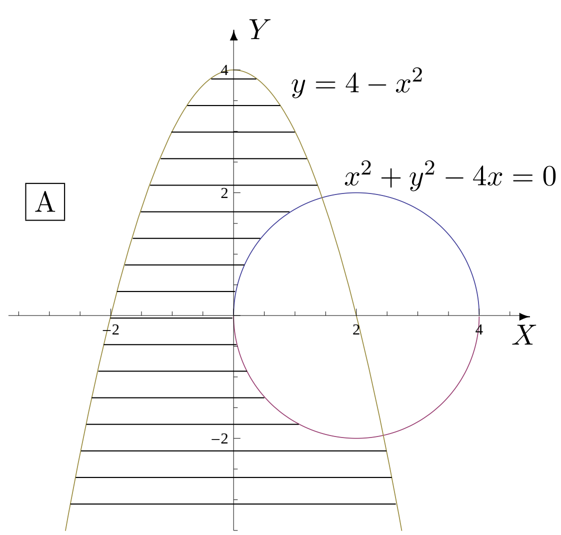
Voici la représentation graphique de ces coniques

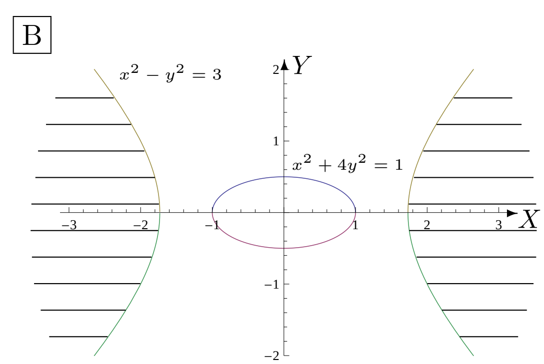


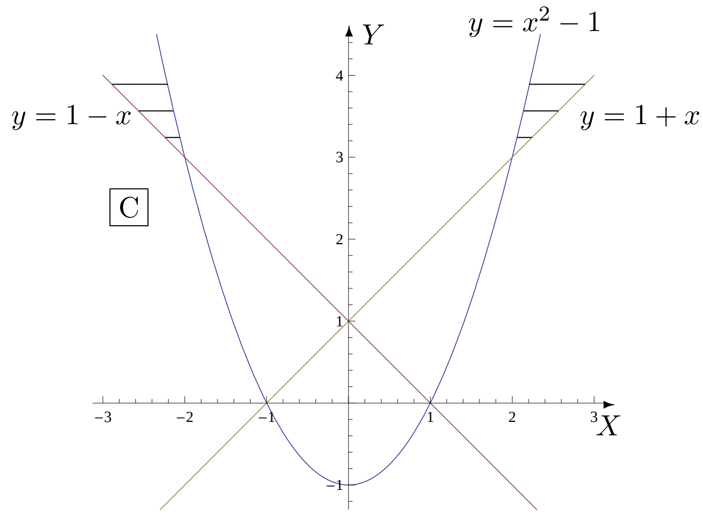


2. **Représenter dans un repère orthonormé en les hachurant les ensembles dont une description analytique est la suivante**

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 4x \geq 0 \text{ et } y \leq 4 - x^2\}.\text{(cf. Nov 2006)}$$
$$B = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + 4y^2 \geq 1 \text{ et } 4 - x^2 + y^2 \leq 1\}.\text{(cf. Nov 2007)}$$
$$C = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \geq y \text{ et } 1 - y \leq x \leq y - 1\}.\text{(cf. Janv 2008)}$$







Les points des bords sont compris dans l'ensemble pour les 3 cas.