1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Révisions en vue de l'interrogation du 19 avril 2013 : correction

Version 19 mars 2013

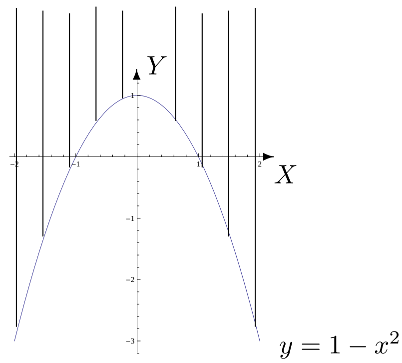
Révisions

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y-1}$$

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y-1>0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points de la parabole étant exclus.



   (b) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(2t+1, 3t^2)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

   La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \sqrt{7t^2+4t}$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : 7t^2+4t>0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{7}\right[\cup]0,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{7t+2}{\sqrt{7t^2+4t}}$.

   (c) **Que vaut la dérivée de F en 2 ? Simplifier votre réponse au maximum.**

   La dérivée de F en 2 vaut $\dfrac{8}{3}$.

2. **On donne la fonction f continûment dérivable sur $]-4,0[\times]-2,0[$ et à valeurs strictement positives.**

   (a) **Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \sqrt{f(2x-1, \arcsin(x))}$.**

   La fonction g est dérivable sur $]-1,0[$.

   (b) **Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.**

   La dérivée de g est donnée par

$$Dg(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(2x-1,\arcsin(x))}}.(D_u f)(2x-1,\arcsin(x)).2$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{f(2x-1,\arcsin(x))}}.(D_v f)(2x-1,\arcsin(x)).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f.

   (c) **Que vaut cette dérivée en $1/2$?**

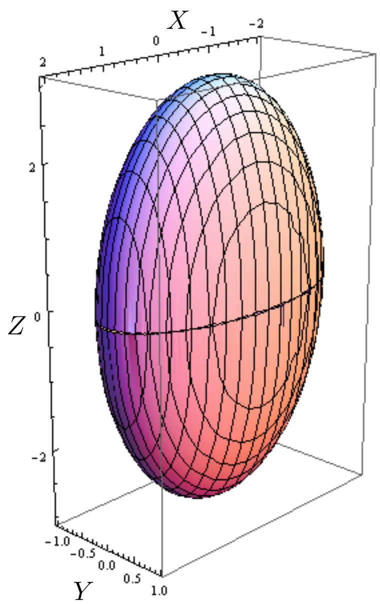
   La fonction g n'est pas dérivable en $1/2$.

3. **Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation**

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0.$$

Quel est le nom de cette quadrique ?

Cette quadrique est un ellipsoïde dont voici la représentation



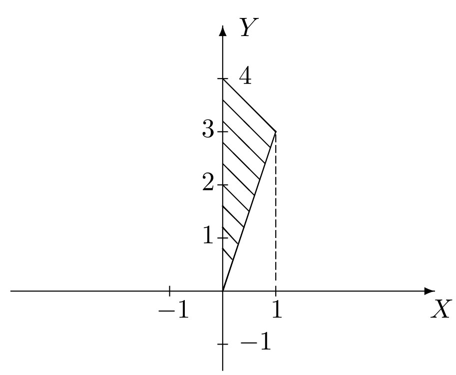
4. **Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(s,t,u) = 2t \arcsin(3u - s)$.**

La fonction f est dérivable sur $\{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3 : -1 < 3u - s < 1\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$\left(\frac{-2t}{\sqrt{1-(3u-s)^2}},\ 2\arcsin(3u-s),\ \frac{6t}{\sqrt{1-(3u-s)^2}} \right).$$

5. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

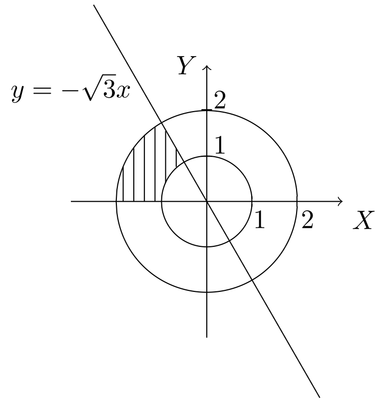
$$\iint_A y e^{y-x} dx dy.$$



La fonction $f : (x,y) \mapsto y e^{y-x}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A y e^{y-x} dx dy = \frac{5}{4}(e^4 - 1) - e^2.$$

6. **Calculer, si possible l'intégrale suivante**
$$\iint_A \frac{y}{x} dxdy,$$
où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{y}{x}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et, en passant aux coordonnées polaires, on obtient
$$\iint_A \frac{y}{x}\ dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r\,\mathrm{tg}(\theta)\ d\theta \right) dr = -\frac{3}{2}\ln 2.$$

7. **Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.**
$$\text{a)}\quad \int_{-\infty}^{-1} \left(\int_{-x^2}^{x} xe^{2y} dy \right) dx \qquad \text{b)}\quad \int_{-2}^{0} \left(\int_{x^2}^{4} \frac{x}{1+y^4}\ dy \right) dx$$

a) La fonction $f : (x,y) \mapsto xe^{2y}$ est continue et négative sur l'ensemble d'intégration A (ensemble hachuré ci-dessous) non borné et parallèle aux 2 axes. On vérifie qu'elle est intégrable sur A et on a
$$\int_{-\infty}^{-1} \left(\int_{-x^2}^{x} xe^{2y} dy \right) dx = -\frac{1}{4e^2}.$$

b) La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{1+y^4}$ est continue sur l'ensemble d'intégration B (ensemble hachuré ci-dessous) borné fermé et parallèle aux 2 axes ; elle est donc intégrable sur cet ensemble. Après permutation de l'ordre d'intégration, on a
$$\int_{-2}^{0} \left(\int_{x^2}^{4} \frac{x}{1+y^4}\ dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{x}{1+y^4}\ dx \right) dy = -\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}(16).$$