1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Répétition 1 : correction

Version 24 septembre 2012(V1 : 29/08/09)

I. Problème élémentaire

(1) Un terrassier a creusé les 4/5 de la longueur d'un fossé. Il creuse encore une longueur de 4,5 m et constate qu'il n'a plus qu'à creuser les 14 % de la longueur pour en avoir terminé. Quelle est la longueur du fossé en mètres ?

1. **Quelles sont les données ?**
   La longueur de fossé creusée vaut 4/5 de la longueur totale + 4,5 m. Il reste 14 % de la longueur à creuser pour terminer le travail.
2. **Que cherche-t-on ?**
   La longueur du fossé en mètres .
3. **Si on nomme x l'inconnue, que représente x de façon précise ?**
   La longueur du fossé en mètres.
4. **Que peut-on calculer successivement ?**
   1) La longueur déjà creusée vaut $\frac{4x}{5} + 4,5$
   2) La longueur qui doit encore être creusée vaut $\frac{14x}{100} = \frac{7x}{50}$.
   3) La longueur du fossé vaut $\frac{4x}{5} + 4,5 + \frac{7x}{50}$
5. **Quelle est l'équation obtenue ?**
$$\frac{4x}{5} + 4,5 + \frac{7x}{50} = x$$
6. **La résoudre.**
   L'équation est équivalente à
$$x - \frac{4x}{5} - \frac{7x}{50} = 4,5 \Leftrightarrow \frac{3x}{50} = 4,5 \Leftrightarrow x = 75$$
7. **Donner la solution du problème en rédigeant une conclusion.**
   La longueur du fossé est 75 m.

(2) Des personnes doivent rembourser ensemble une somme de 120 000 euros. Elles devraient chacune rembourser la même somme mais comme 4 d'entre elles sont insolvables, la dette de chacune des autres est augmentée de 2 500 euros. Combien y a-t-il de personnes débitrices au départ ?

Si x est le nombre de personnes débitrices au départ, on a l'équation $\dfrac{120\ 000}{x-4} = \dfrac{120\ 000}{x} + 2\ 500$.
Après réduction au même dénominateur, en la résolvant, on trouve qu'il y avait 16 personnes débitrices au départ.

II. Résolution d'équations (x est l'inconnue réelle)

Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.

$$a)\ \pi x - \frac{1}{2} = -\frac{x}{\pi^2} \qquad b)\ 25x^2 + 1 = 0 \qquad c)\ 27x^3 + 1 = 0 \qquad d)\ 3x - \frac{1}{x} = -2$$

Si on note S l'ensemble des solutions de l'équation, on a

a) $S = \left\{\dfrac{\pi^2}{2(\pi^3+1)}\right\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\dfrac{1}{3},\ -1\right\}$

III. Valeur absolue et équations (A est l'inconnue réelle)

1. a) **Si un réel est noté $A-3$, définir la valeur absolue de $A-3$.**
La valeur absolue du réel $A-3$ est

$$|A-3| = \begin{cases} A-3 & \text{si} \quad A-3 \geq 0 \\ -A+3 & \text{si} \quad A-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |A-3| = \begin{cases} A-3 & \text{si} \quad A \geq 3 \\ -A+3 & \text{si} \quad A \leq 3 \end{cases}$$

b) **Dans ce cas, quelle est la valeur de A qui joue un rôle différent des autres valeurs ?**
La valeur de A qui joue un rôle différent des autres valeurs est 3.
c) **Répondre aux mêmes questions en considérant le réel A^2-3.**
La valeur absolue du réel A^2-3 est

$$|A^2-3| = \begin{cases} A^2-3 & \text{si} \quad A^2-3 \geq 0 \\ -A^2+3 & \text{si} \quad A^2-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |A^2-3| = \begin{cases} A^2-3 & \text{si } A \leq -\sqrt{3} \text{ ou } A \geq \sqrt{3} \\ -A^2+3 & \text{si } -\sqrt{3} \leq A \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Les valeurs de A qui jouent un rôle différent des autres valeurs sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

2. **Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.**

$$a)\ |-A+\sqrt{3}| = |-2A| \qquad b)\ \left|A^2-|A^4|\right|+1=0 \qquad c)\ \left|A^2-|A^4|\right|-2=0$$

Si on note S l'ensemble des solutions de l'équation, on a

a) $S = \left\{-\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right\}$

IV. Résolution d'inéquations (x est l'inconnue réelle)

1. **Si on a $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ $(a, b \in \mathbb{R}_0)$ peut-on toujours dire que cette inégalité est équivalente à $a > b$?**
a) **Si oui, le prouver.**
b) **Si non, donner un contre-exemple et dire dans quel(s) cas cette équivalence pourrait être correcte.**
Non. On a $\frac{-1}{2} < \frac{1}{10}$ par exemple mais on n'a pas -2 supérieur à 10. Cette équivalence est correcte si et seulement si les réels sont de même signe.

2. **Résoudre les inéquations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes inéquations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions**

$$a)\ \frac{-1}{2x-3} \leq \frac{-1}{x-3} \qquad b)\ |2x-1| > 5 \qquad c)\ \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{|5x-2x^2-3|} \qquad d) |x^2+x-2| \leq 1-x$$

Si on note S l'ensemble des solutions de l'inéquation, on a

a) $S =]-\infty, 0] \cup \left]\dfrac{3}{2}, 3\right[$ b) $S =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ c) $S =]-\infty, 1[\cup \left]1, \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}, 2\right]$
d) $S = [-3, -1] \cup \{1\}$

V. Racines de réels et puissances

1. **Que valent (a) $\sqrt{(-2\pi)^4}$ (b) $\sqrt[3]{(-5)^3}$?**
   On a a) $\sqrt{(-2\pi)^4} = 4\pi^2$ et b) $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$.
2. a) **Pour quelles valeurs de x la racine $\sqrt{9x^2}$ est-elle définie ?**
   La racine $\sqrt{9x^2}$ est définie pour tout réel.
   b) **Peut-on dire que $\sqrt{9x^2} = 3x$? Justifier votre réponse.**
   Non car le premier membre est positif alors que le second est positif ou négatif suivant la valeur de x. Cette égalité n'est vraie que si $x \geq 0$.
   c) **Si x est un réel négatif, que vaut $\sqrt{9x^2}$?**
   Si x est un réel négatif alors $\sqrt{9x^2} = 3|x| = -3x$.

3. a) **Si n est un naturel non nul, comparer les réels $(-x)^{2n}$ et $-x^{2n}$: sont-ils égaux ou différents ? Justifier votre réponse.**
   Ces réels ne sont égaux que si $x = 0$ sinon le premier est positif tandis que le second est négatif.
   b) **Même question avec $(-x)^{2n+1}$ et $-x^{2n+1}$.**
   Ces réels sont égaux pour tout réel x.

VI. Sommes et symboles sommatoires

1. a) **On considère la somme $s_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$. Exprimer en français la somme considérée.**
   C'est la somme des 6 premiers naturels impairs.
   b) **Comment note-t-on de façon générale un terme de ce type ?**
   On peut le noter $2n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}_0$ ou $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   c) **Ecrire cette somme à l'aide d'un symbole sommatoire.**
   On peut noter cette somme sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{5}(2n+1)$ par exemple.
2. a) **On considère la somme $s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. Comment caractériser chacun des termes de cette somme sans tenir compte de son signe ?**
   Chaque terme de la somme est une puissance naturelle de $\frac{1}{2}$.
   b) **Comment, dans une somme, peut-on passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif ?**
   On peut passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif grâce à un facteur du type $(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   c) **Ecrire s_2 à l'aide d'un symbole sommatoire.**
   On peut noter cette somme sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ par exemple.
3. **On considère la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{4}(-3)^{2j}$.**
   a) **Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?**
   Cette somme comporte 4 termes.
   b) **Que vaut le terme correspondant à $j = 2$?**
   Le terme correspondant à $j = 2$ vaut $(-3)^4 = 81$.

c) **Que vaut cette somme ?**
Cette somme vaut

$$9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 = 9(1 + 9 + 9^2 + 9^3) = 9\ .\ 820 = 7\ 380.$$

d) **Si j variait de 0 à 20, quelle formule pratique pourrait-on utiliser pour calculer la somme ? L'appliquer sans calculer le résultat numérique final.**
On utiliserait la formule suivante dans laquelle q est un réel ou un complexe et M est un naturel non nul

$$\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \begin{cases} \frac{1-q^M}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ M & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

La somme

$$\sum_{j=0}^{20} (-3)^{2j} = \sum_{j=0}^{20} 9^j = \frac{1-9^{21}}{1-9} = \frac{9^{21}-1}{8}.$$

4. **On considère la somme** $S_2 = \sum_{l=2}^{7} (\sqrt[3]{3})^2$

a) **Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?**
Cette somme comporte 6 termes.
b) **Que vaut le terme correspondant à $l = 3$?**
Le terme correspondant à $l = 3$ vaut $(\sqrt[3]{3})^2$.
c) **Que vaut cette somme ?**
Cette somme vaut $6(\sqrt[3]{3})^2 = 6\ \sqrt[3]{9}$.