Université de Liège

1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématique
Répétition 10 : correction

Version 17 octobre 2012

I. Calculs d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. **Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que**
   (a) si f est une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

   (b) si f est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$
\begin{array}{lll}
(1)\ \displaystyle\int_{-2}^{1} (x^3+3x)\ dx & (2)\ \displaystyle\int_{0}^{1} x\, e^{2x}\ dx & (3)\ \displaystyle\int_{-1}^{0} 3x\, e^{-x^2}\ dx \\
(4)\ \displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{3+2x}\ dx & (5)\ \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x\ dx & (6)\ \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2 x\ dx \\
(7)\ \displaystyle\int_{0}^{\pi} x\cos^2 x\ dx & (8)\ \displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\ dx & (9)\ \displaystyle\int_{3}^{5} \frac{x-1}{x-2}\ dx \\
(10)\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin x\ dx & (11)\ \displaystyle\int_{-3\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2}\ dx & (12)\ \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx
\end{array}
$$

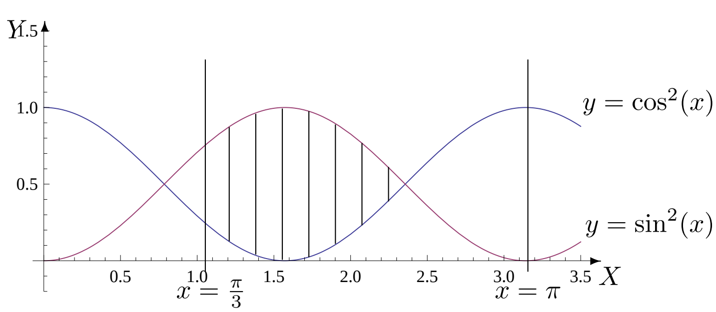
(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^3+3x)\ dx = -\frac{33}{4}$	(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\, e^{2x}\ dx = \frac{e^2+1}{4}$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 3x\, e^{-x^2}\ dx = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)$	(4) $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{3+2x}\ dx = \frac{19}{3}$
(5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x\ dx = \frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{24}$	(6) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2 x\ dx = \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$
(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\cos^2 x\ dx = \frac{\pi^2}{4}$	(8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\ dx = \frac{1}{3}$
(9) $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{x-1}{x-2}\ dx = 2+\ln 3$	(10) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin x\ dx = 0$
(11) $\displaystyle\int_{-3\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2}\ dx = \frac{\pi}{6}$	(12) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx = \frac{\pi}{2}$

II. Calcul d'aires

1. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right], y \in \mathbb{R} \ \textbf{et}\ \cos^2 x \le y \le \sin^2 x\right\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

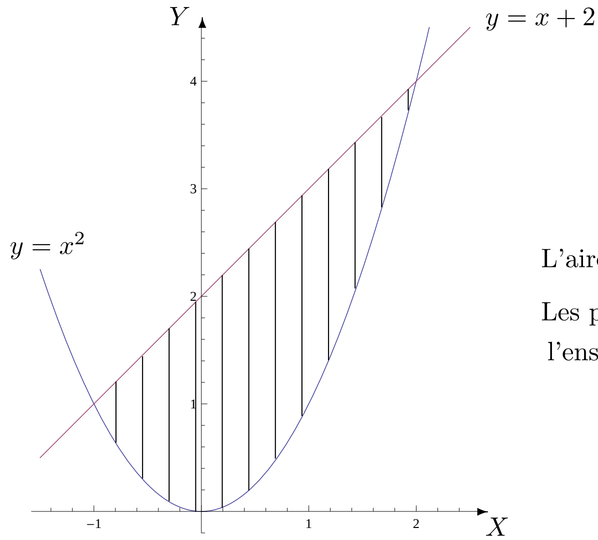


L'aire hachurée vaut $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$. Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

2. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) : x \in [-1,2],\ y \in [x^2, x+2]\right\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.



L'aire hachurée vaut $\dfrac{9}{2}$.

Les points des bords sont compris dans l'ensemble.