# *1, 2, 3... Sciences*

***Année académique 2012-2013***

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 10 Informatique : correction

Version 15 avril 2013

**Séries**

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{j^2+2}{j^3+3}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^2+\sqrt{2}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{\sqrt{k}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{n\ln(n)}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{2n}.2^{1-n}$

a) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{3} \in\, ]-1, 1[$
c) Série alternée avec la suite $r_j = \dfrac{j^2+2}{j^3+3}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
d) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
e) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
f) Série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
h) Série géométrique divergente car $\frac{9}{2} \notin ]-1, 1[$

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent** :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^j$ b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+3)}$

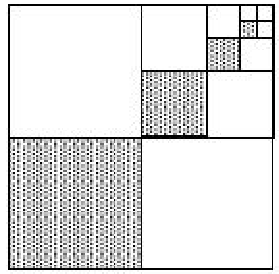
e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^{2k-1}}{k!}$ g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$

a) Série géométrique divergente car $\sqrt{3} \notin\, ]-1, 1[$
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{3} \in\, ]-1, 1[$ ; la somme de la série vaut $\dfrac{1}{12}$
c) Série définissant l'exponentielle de $-2$ ; la somme de la série vaut $e^{-2} + 1 = \dfrac{1}{e^2} + 1$
d) Série convergente dont la somme vaut $\frac{5}{12}$
e) Série géométrique convergente car $\frac{2}{3} \in\, ]-1, 1[$ ; la somme de la série vaut 24
f) Série définissant l'exponentielle de 16 ; la somme de la série vaut $\dfrac{e^{16}-1}{4}$
g) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{25}{48}$
h) Série convergente ; la somme de la série vaut $\cos(1) - 1$

3. **Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel** $1,5909090\ldots$.

Le réel $1,5909090\ldots = 1,5 + 90.10^{-3} \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} 100^{-j} = \frac{35}{22}$.

4. **Un carré de $6\,cm$ de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?**



La surface ombrée totale vaut 12 cm$^2$.

5. **Une balle est lâchée d'une hauteur de $3\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?**

Quand la balle sera complètement arrêtée, elle aura parcouru 21 m.

6. **Démontrer l'égalité**

$$\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) + \cos^6(\theta) + \ldots = \text{cotg}^2(\theta).$$

**A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?**

Cette égalité est vraie si et seulement si $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.