1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 11 Chimie, Géographie, Physique : correction

Version 25 avril 2013

$\boxed{\textbf{Séries}}$

1. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^4+j+2}{j^4+5j^2+10}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^3}}{(k+1)^4+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^4+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e}{4n+5}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{n^5+1}}$ $(p \in \mathbb{N}_0)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{ak}$ $(a \in \mathbb{R})$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{3}}$

a) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{\sqrt{3}}{4} \in]-1,1[$. On peut aussi la considérer comme une série alternée avec la suite $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
c) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = \frac{5}{2} > 1$ donc série convergente.
d) Série convergente car son terme général pris en valeur absolue peut être comparé à celui d'une série de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$. On peut aussi la considérer comme une série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{2n}{n^4+1}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
e) Comparaison avec la série harmonique divergente donc série divergente.
f) Si $p < \frac{5}{2}$ (donc si $p = 1$ ou $p = 2$) : comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha > 1$ donc série convergente ; si $p > 2$, comparaison avec une série de Riemann divergente car $\alpha < 1$ donc série divergente. Remarquons que si $p \geq 5$, le terme général ne tend pas vers 0.
g) Si $a < 0$: série géométrique convergente car $e^a \in]-1,1[$; si $a \geq 0$: série géométrique divergente car $e^a \notin]-1,1[$
h) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.

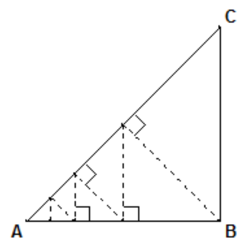
2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent (on donne** $a, b, c \in \mathbb{R}$ **tels que** $0 < ab < c$ **et** $c \neq 0$**) :**

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^{j+4}}{j!\ln(9)}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+7k+12}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}b^n}{c^{n+3}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n(n+2)(n+4)}$ f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \ln\left(4-\frac{1}{n^2}\right)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{k}{2k+3}\right)$

a) Série exponentielle ; la somme de la série vaut $\frac{3}{2}\ln^3(3)$
b) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2\pi-\sqrt{2}}$
c) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{1}{3}$
d) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{a}{c^2(c-ab)}$
e) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{11}{12}$
f) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

3. **Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $|BC| = a$ cm ($a > 0$) comme représenté ci-dessous. Une puce qui se trouve en B se déplace le long d'une droite perpendiculaire au segment $[AC]$. Lorsqu'elle atteint ce segment, elle tourne et revient sur le segment $[AB]$ en prenant une route perpendiculaire à $[AB]$. Elle fait ainsi l'aller-retour entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point A. Quelle sera la distance parcourue par la puce ?**



La distance parcourue par la puce sera $a\ \dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = a(\sqrt{2}+1)$ cm.