Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématique
Répétition 12 : correction

Version 7 décembre 2012

I. Quelques manipulations

1. **L'équation différentielle** $2(D_t y)^2 = y$ **est-elle linéaire ?**

   Cette équation n'est pas linéaire car une combinaison linéaire de solutions de cette équation n'est pas solution de l'équation.

2. **Montrer que la fonction** $g(t) = 4t^2 - 4t - 5,\ (t \in \mathbb{R})$ **vérifie le système** $\begin{cases} (D_t y)^2 = 16(y+6) \\ y(0) = -5 \\ y(2) = 3 \end{cases}$

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g(0) = -5$ et $g(2) = 3$ ainsi que $Dg(t) = 8t - 4$. En remplaçant Dy et y respectivement par Dg et g dans le système, les trois équations sont vérifiées.

3. **Montrer que**[1] **la fonction** $g(t) = \text{tg }(2t) - \dfrac{1}{\cos(2t)},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$**, vérifie l'équation** $\dfrac{dy}{dt} - y^2 = 1.$

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ donc sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et on a

   $$Dg(t) = \frac{2 - 2\sin(2t)}{\cos^2(2t)} = \frac{2}{1 + \sin(2t)}.$$

   En remplaçant $\dfrac{dy}{dt}$ et y respectivement par $Dg(t)$ et g dans l'équation donnée, celle-ci est vérifiée.

II. Equations différentielles, résolutions

1. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

   1) $4Df(x) - 3if(x) = 0$ 2) $D^2 f(t) = 3f(t)$

   3) $D^2 f(u) = 0$ 4) $Df(x) + f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$

   5) $Df(x) + 3f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$

   Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

   1) $f(x) = Ce^{\frac{3ix}{4}} = C(\cos(\frac{3x}{4}) + i\sin(\frac{3x}{4})),\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe

   2) $f(t) = C_1\, e^{-\sqrt{3}\,t} + C_2\, e^{\sqrt{3}\,t},\ t \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   3) $f(u) = C_1 u + C_2,\ u \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   4) $f(x) = (C + \ln(|e^x|) - 1)e^{-x} + 1,\ x \in \mathbb{R}_0$ où C est une constante arbitraire complexe

   5) $f(x) = (C + \ln(e^x + 1))e^{-3x} - e^{-2x} + \frac{e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe

1. Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2 f}{dx^2}$