1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 12 Chimie, Géographie, Physique : correction

Version 14 mars 2013

Fonctions de plusieurs variables

1. **En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [1]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.**
Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de 3 paramètres : l'énergie interne U, le volume V et le nombre de particules N du système.*
Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction S, dépendant de U, V et N, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique.* Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par
$$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$
où
– T est la température du système ;
– p est la pression du système ;
– μ est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [2]) ;
et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par
$$S = k_B N \ln \frac{V - N v_0}{N} + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{U + \frac{K_i N^2}{V}}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2} k_B N$$
où
– k_B est la constante de Boltzmann et vaut approximativement $1,38.10^{-23} J/K$,
– v_0 est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,
– $K_i > 0$ est le paramètre d'interaction entre les particules,
– m est la masse d'une particule,
– $\hbar$ est la constante de Planck et vaut $6,626.10^{-34} J.s$,
déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

Solution. La première équation d'état conduit à
$$D_U S = \frac{3k_B N}{2(U + \frac{K_i N^2}{V})} = \frac{1}{T}$$
qui peut se réécrire sous la forme

1. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va "diffuser" dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.
2. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

$$U = \frac{3}{2}k_B NT - \frac{K_i N^2}{V}.$$

La seconde équation d'état conduit à

$$D_V S = \frac{k_B N}{V - Nv_0} + \frac{3k_B N}{2} \frac{\frac{-K_i N^2}{V^2}}{U + \frac{K_i N^2}{V}} = \frac{p}{T}$$

2. **La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation**[3] **:**

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant t, la température d'un tel gaz, qui est de $400K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $200\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

Solution. La pression diminue à la vitesse de $0,012465$ kPa/s.

3. **La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :**

> **Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que**
>
> $$(D_x f)(a,b) = (D_y f)(a,b) = 0.$$
>
> **Posons**
>
> $$D = (D_x^2 f)(a,b)(D_y^2 f)(a,b) - [(D_x D_y f)(a,b)]^2.$$
>
> (a) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;**
> (b) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;**
> (c) **Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé "point-selle" ;**
> (d) **Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.**

En se basant sur ce test,
a) **rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction**

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 2xy + 1.$$

Solution. L'origine $(0,0)$ est un point-selle. De plus, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$ et $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$ sont des minima locaux de f.

3. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

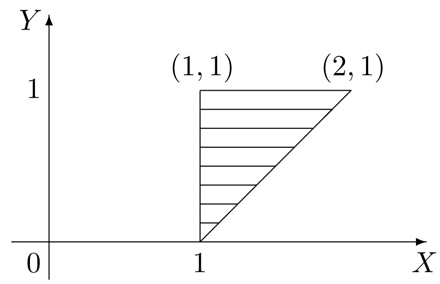
b) **déterminer la distance[4] (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(-1, 0, 2)$ et le plan d'équation cartésienne $2x + y + z = 4$.**

Solution. Le point de coordonnée $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ correspond à un minimum local (et même global car en géométrie, on prouve que la distance d'un point à un plan est unique) de la distance, qui vaut en ce point $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. La distance du point donné au plan donné vaut donc $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

4. **Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x, y)$ en un point(x, y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par**

$$Q = \iint_R \rho(x, y)\, dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x, y) est donnée par $\rho(x, y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.



Solution. La charge totale présente sur le domaine triangulaire donné est de $\frac{11}{12}C$.

5. **En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$, de la manière suivante.**
Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut

$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$

Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par

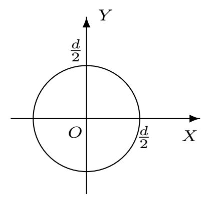
$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$

4. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$
et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.

On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
a) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre**;
b) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.**

Solution. a) Considérons le repère orthonormé dont l'origine O est le centre du disque donné, et dont les axes coïncident avec deux droites perpendiculaires passant par O. On obtient dès lors la configuration suivante :



Dans ces conditions, le disque D est décrit par

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right\}$$

ce qui correspond en coordonnées polaires à l'ensemble

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid r \in \left]0, \frac{d}{2}\right],\ \theta \in [0, 2\pi] \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Ainsi, le moment d'inertie du disque D par rapport à son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'origine du repère choisi et est donné par

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy = \iint_{D'} r^2 \rho\, r\, drd\theta = \frac{\pi \rho d^4}{2^5}.$$

b) Vu le choix du repère, le moment d'inertie du disque D par rapport à une droite passant par son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'axe X ou encore par rapport à l'axe Y. On en conclut donc que tous ces moments d'inertie du disque sont égaux, c'est-à-dire $I_X = I_Y = I_{d'}$ quelle que soit la droite d' passant par O. Par conséquent, comme

$$I_O = I_X + I_Y = 2I_{d'},$$

il s'ensuit que

$$I_{d'} = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi \rho d^4}{2^6}.$$

6. **Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par**

$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx \quad \left(\text{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx\right).$$

De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ continue, intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx \right) dy = 1,$$

auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy.$$

Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} C(2x + y) & \text{si } 0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) **Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.**

(b) **Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 8 ans mais au moins 3 ans.**

Solution. (a) Pour que la fonction donnée soit une fonction de densité, la constante C doit valoir $\frac{1}{1500}$.

(b) La probabilité que la durée de vie d'une batterie de cette fabrique soit au maximum de 8 ans et au minimum de 3 ans est de $\frac{812}{1500} \approx 0,5413$, c'est-à-dire à peu près 54%.

7. **Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.**

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{\frac{-t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 12 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 6 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 24 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Solution. Si l'on note X (resp. Y) le temps d'attente pour obtenir un ticket (resp. une boisson fraîche), il vient que $\mathbb{P}[X + Y < 24] = 1 + \frac{1}{e^4} - \frac{2}{e^2} \approx 0,7476$. Par conséquent, environ 75% des spectateurs attendent moins de 24 minutes avant de s'asseoir.