Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématique
Répétition 13 : correction

Version 18 décembre 2012

I. Equations différentielles, résolutions

1. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$a)\ D^2 f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^{-x} + 2x^2 e^x$$

$$b)\ 4D^2 f(x) - f(x) = \sin^2 x - \tfrac{1}{2}$$

$$c)\ D^2 f(x) - 2Df(x) + f(x) = (2 + \sin x)e^x$$

Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

a) $f(x) = \left(C_1 - \dfrac{x}{3}\right) e^{-x} + C_2\, e^{2x} - \left(x^2 + x + \dfrac{3}{2}\right) e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

b) $f(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} + C_2\, e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{34}\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

c) $f(x) = (C_1 x + C_2 + x^2 - \sin(x))e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

2. **Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un ≪ taux ≫ proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle**

$$Dy(t) = k(y - y_0)$$

où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée ≪ Newton's law of cooling ≫ et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.
Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(t) = C\, e^{kt} + y_0,\ t \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe.
Comme $k < 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

3. **Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement, cette population sera-t-elle triple sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?**

Cette population aura triplé $50\,\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 80$ ans après le recencement.

4. **La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est de 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s^2. Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?**

Quand la balle sera arrêtée, elle aura parcouru 25 m depuis son point de départ.

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants, du second ordre, avec conditions initiales

1. **Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$\begin{cases} D^2 f(x) + 4f(x) = 4x^2 + 2x - 6 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La solution du système est la fonction

$$f(x) = 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + x^2 + \frac{x}{2} - 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. **Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.**

$$D^2 f(x) + 2Df(x) = -4x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 **en** 1 **et dont la dérivée première vaut** 0 **en** 1**.**

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2\, e^{-2x} - x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.
La solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1 est la fonction

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\, e^{2-2x} - x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}.$$

III. Divers

1. **Déterminer la valeur de la constante** c **de telle sorte que la fonction** $f(x) = x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$ **soit une solution de l'équation différentielle**

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x-2)\frac{dy}{dx} - (y+4) = 0$$

La constante vaut $\frac{3}{4}$.

2. **Soit** L **la longueur d'un pendule et soit** T **sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant** T **et** L **est l'équation différentielle**

$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$

Montrer que cela implique que la période T **est proportionnelle à la racine carrée de la longueur** L**.**

Les solutions de cette équation sont les fonctions $T(L) = C\sqrt{L},\ L \in]0, +\infty[$ où C est une constante arbitraire strictement positive.
La période T est donc bien proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.