1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 13 Chimie, Géographie, Physique : correction

Version 21 mars 2013

$\boxed{\textbf{Calcul matriciel}}$

1. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :**
$$\left\{\begin{array}{rcl} Dx(t) & = & -3x(t)-4y(t)+9t \\ Dy(t) & = & -5x(t)-2y(t)+9e^t \end{array}\right. .$$
Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

Solution. Le système donné se réécrit
$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{=P(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 9t \\ 9\,e^t \end{pmatrix}}_{:=B(t)}. \qquad (*)$$
Tentons de diagonaliser la matrice A. On a
$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2+5\lambda-14 = (\lambda-2)(\lambda+7)$$
et donc les valeurs propres de A sont 2 (simple) et -7 (simple), ce qui entraîne que A est diagonalisable. Après recherche, il s'avère que les vecteurs
$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
sont des vecteurs propres de A associés respectivement à 2 et -7. Ainsi, en posant
$$S = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Dès lors, en posant
$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$
il vient que
$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix},$$
et, en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$ ci-dessus, on obtient que
$$\begin{aligned} & S^{-1}\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix} = S^{-1}A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + S^{-1}\begin{pmatrix} 9t \\ 9\,e^t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1}AS\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + S^{-1}\begin{pmatrix} 9t \\ 9\,e^t \end{pmatrix}. \qquad (**) \end{aligned}$$
Or, $\det(S) = 9$ et l'inverse de S est donnée par
$$S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Par conséquent, l'équation $(**)$ équivaut à
$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9t \\ 9\,e^t \end{pmatrix}.$$
ce qui équivaut encore au système

$$\begin{cases} DX(t) &= -7X(t) + 5t + 4e^t \\ DY(t) &= 2Y(t) - t + e^t \end{cases}.$$

Les équations différentielles sont alors *découplées* et peuvent être résolues séparément. Les solutions de ces deux dernières EDLCC sont les fonctions

$$X(t) = C_1 e^{-7t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{5}{7}t - \frac{5}{49},\ t \in \mathbb{R}$$

et

$$Y(t) = C_2 e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4},\ t \in \mathbb{R}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Enfin, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} Y(t).$$

ou encore

$$\begin{cases} x(t) = C_1\, e^{-7t} - 4C_2\, e^{2t} + \dfrac{9}{2}\, e^t - \dfrac{9}{7}\, t - \dfrac{54}{49},\ t \in \mathbb{R} \\ y(t) = C_1\, e^{-7t} + 5C_2\, e^{2t} - \dfrac{9}{2}\, e^t + \dfrac{45}{14}\, t + \dfrac{225}{196},\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}$.

2. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\begin{cases} Dx(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) \\ Dz(t) &= -2x(t) - 4y(t) + 2z(t) \end{cases}.$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ **du vecteur position de cette particule à tout instant** t**.**

Solution. Le système donné se réécrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \\ Dz(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{=P(t)}. \qquad (*)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont 0 (valeur propre double) et 1 (valeur propre simple). Après recherche, il s'avère que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A, linéairement indépendants, associés à 0, ce qui entraîne que la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède au moins 3 vecteurs propres linéairement indépendants. De plus, le vecteur

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

et en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} DX(t) & = & 0 \\ DY(t) & = & 0 \\ DZ(t) & = & Z(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} X(t) & = & C_1 \\ Y(t) & = & C_2 \\ Z(t) & = & C_3\, e^t \end{array} \right. ,$$

où $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$. Dès lors, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^t \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \quad \text{où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = -2C_1 + C_2 - C_3\, e^t,\ t \in \mathbb{R} \\ y(t) = C_1 + C_3\, e^t,\ t \in \mathbb{R} \\ z(t) = C_2 + 2C_3\, e^t,\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

où $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$.

3. **Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :**
   - **étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,8$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,2$;**
   - **étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,2$;**
   - **étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,1$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,9$.**

   Déterminer

   a) la matrice de transition du système ;

   Solution. Notons respectivement I_0, M_0 et S_0 les probabilités qu'un individu soit immunisé, malade, non malade et non immunisé un jour donné. Le mois suivant, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} I_1 & = & 0,8\,I_0 + 0\,M_0 + 0,3\,S_0 \\ M_1 & = & 0\,I_0 + 0,1\,M_0 + 0,2\,S_0 \\ S_1 & = & 0,2\,I_0 + 0,9\,M_0 + 0,5\,S_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ M_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,9 & 0,5 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} I_0 \\ M_0 \\ S_0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;

Solution. Si un individu est immunisé un jour donné, la probabilité qu'il soit immunisé deux mois plus tard est de 70%.

c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

Solution. A long terme, la probabilité qu'un individu soit immunisé est donnée par $\frac{27}{49}$, c'est-à-dire environ 55%.

4. **Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :**
   - étant dans le sol, la molécule a 2 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 3 chances sur 10 de disparaître ;
   - étant dans l'herbe, elle a 3 chances sur 10 de revenir dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
   - étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
   - si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.
   Déterminer la probabilité qu'à long terme, la molécule de phosphore disparaisse de l'écosystème.

   Solution. Notons respectivement B_0, D_0, H_0 et S_0 les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le bétail, disparaisse, soit dans l'herbe et soit dans le sol à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} B_1 & = & \frac{1}{5}B_0 + 0D_0 + \frac{1}{2}H_0 + 0S_0 \\ D_1 & = & \frac{1}{20}B_0 + 1D_0 + 0H_0 + \frac{3}{10}S_0 \\ H_1 & = & 0B_0 + 0D_0 + \frac{1}{5}H_0 + \frac{3}{10}S_0 \\ S_1 & = & \frac{3}{4}B_0 + 0D_0 + \frac{3}{10}H_0 + \frac{2}{5}S_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \\ H_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{20} & 1 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} B_0 \\ D_0 \\ H_0 \\ S_0 \end{pmatrix}.$$

   Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.
   A long terme, la probabilité qu'une molécule disparaisse est 100%.

5. **La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données**

chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.
Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1**, B correspond à** 2**,** $\ldots$ **, Z correspond à** 26**. En outre, on assigne le nombre** 27 **à un espace. Ainsi, le message devient :**

S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R**
19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18**

Puisqu'on emploie une matrice 2×2**, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs**[1] 1×2 **:**

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C**, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par** C**, ce qui nous donne :**

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

1. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \mathbf{19} & \mathbf{21} & \mathbf{9} & \mathbf{19} & \mathbf{27} & \mathbf{5} & \mathbf{14} & \mathbf{27} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{14} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{18} \\ \mathbf{S} & \mathbf{U} & \mathbf{I} & \mathbf{S} & * & \mathbf{E} & \mathbf{N} & * & \mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{N} & \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{R} \end{array}.$$

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$-39, -33, 72, 4, 10, 46, -27, -38, 107, -21, -24, 111, 17, 3, 116, 1, -9, 104, -39, -26, 99$**.**

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Blond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus bref délais.

Solution. La matrice de décodage est donnée par l'inverse de la matrice de codage, c'est-à-dire la matrice

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le message est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 3 & 15 & 21 & 18 & 1 & 7 & 5 & 27 & 16 & 15 & 21 & 18 & 27 & 19 & 5 & 19 & 19 & 9 & 15 & 14 & 27 \\ \mathrm{C} & \mathrm{O} & \mathrm{U} & \mathrm{R} & \mathrm{A} & \mathrm{G} & \mathrm{E} & * & \mathrm{P} & \mathrm{O} & \mathrm{U} & \mathrm{R} & * & \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{S} & \mathrm{S} & \mathrm{I} & \mathrm{O} & \mathrm{N} & * \end{array}.$$

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\ \mathbf{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est la constante de gravitation.

– **Sachant que th :** $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.**

– **Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?**

Solution. - La fonction th : $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée première est

$$D\text{th}(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Comme $\text{th}(0) = 0$ et $D\text{th}(0) = 1$, l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction est le polynôme $P(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 5$ km $= 5000$ m et $h = 2$ m, alors la valeur de $\frac{2\pi h}{\lambda}$ est proche de 0 et, en utilisant l'approximation polynomiale ci-dessus, on a

$$v^2 \approx \frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

Ainsi, la vitesse de la vague du tsunami lors de son arrivée près des côtes était $\sqrt{2 \cdot 9,81} = 4,429$ m/s.