1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 14 Chimie, Géographie, Physique : correction

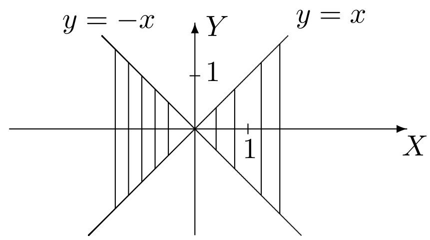
Version 3 mai 2013

Fonctions de plusieurs variables

1. **On donne la fonction** $f:(x,y)\mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}\right)$.

   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

   Solution. Les 2 domaines sont égaux à $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x,\ \dfrac{x-y}{x+y}>0\right\}$

   Les points des droites sont exclus de l'ensemble.

   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-3,1)$.

   Solution. Les dérivées partielles de la fonction sont données par

   $$D_xf(x,y)=\frac{y}{x^2-y^2}\qquad\qquad D_yf(x,y)=\frac{-x}{x^2-y^2}$$

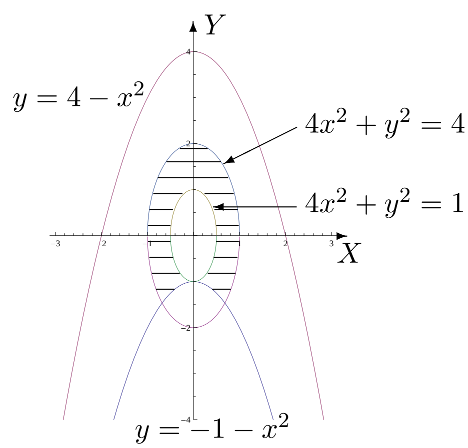
   et, comme le point de coordonnées $(-3,1)$ appartient au domaine de dérivabilité, on a $D_xf(-3,1)=\frac{1}{8}$ et $D_yf(-3,1)=\frac{3}{8}$.

2. **Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-1,4[\times]1,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y)=f(x^2+y,4x^2+y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.**

   Solution. Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

   $$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<x^2+y<\ 4,\ 1<4x^2+y^2<4\}.$$

   Il est représenté par l'ensemble des points hachurés ci-dessous, les points des courbres étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles de F sont données par

$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(x^2+y,4x^2+y^2)\ .\ 2x + (D_vf)(x^2+y,4x^2+y^2)\ .\ 8x$$
$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x^2+y,4x^2+y^2)\ .\ 1 + (D_vf)(x^2+y,4x^2+y^2)\ .\ 2y$$

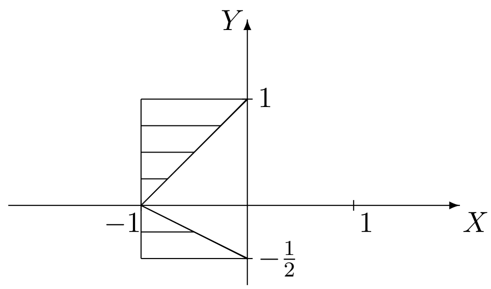
si u et v sont respectivement la première et la seconde variable de f.

3. **Si elles existent, calculer les intégrales suivantes**

a) $I = \int_0^9 \left(\int_{\sqrt{x}}^3 x\cos(y^5)\,dy \right) dx$

Solution. On a $I = \frac{1}{10}\sin(243)$

b) $I = \iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy$ **si** A **est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous**



Solution. On a $I = \frac{3}{2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

c) $I = \iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy$ **si** $A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$

Solution. On a $I = \frac{\pi}{2}$

d) $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^3 \frac{e^{-(y+1)x}}{9+y^2}\,dy \right) dx$

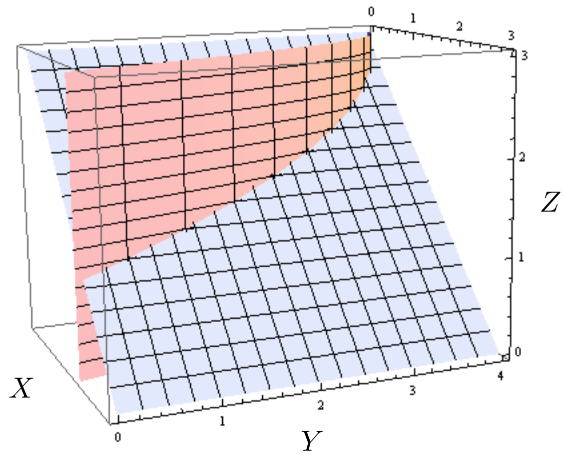
Solution. On a $I = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{12}\right)$.

4. **Calculer le volume du corps de l'espace borné par les surfaces d'équation cartésienne** $x+z=3$ **et** $x^2+y=4$ **et les plans d'équation** $x=0,\ y=0,\ z=0$**. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.**

Solution. Le volume du corps vaut

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^{4-x^2} (3-x)\ dy \right) dx = 12$$

et voici sa représentation graphique (partie “sous” le plan)



Calcul matriciel

1. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. Comme $\det A = 12 \neq 0$, la matrice inverse de A existe et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 12 \\ 12 & 6 & 12 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ si I est la matrice identité de dimension 3.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de A sont -1 (double) et 2 (simple).
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des complexes non simultanément nuls. Dès lors, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 2 sont les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, on a, par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{tel que} \qquad \Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices données sont correctes puisque

$$AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

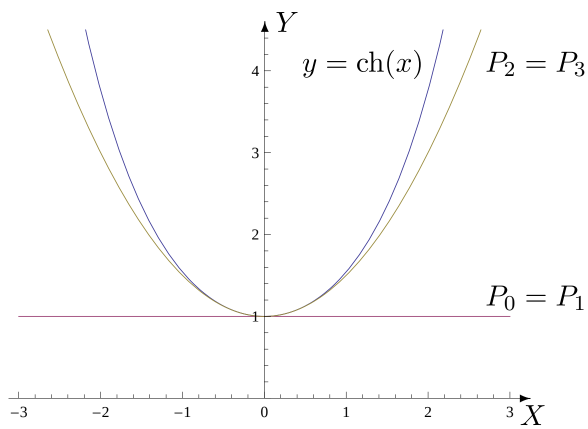
Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0, 1, 2$ et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Solution. Si on note $P_n(x)$ l'approximation à l'ordre n en 0, puisque f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$P_0(x) = P_1(x) = 1 \text{ et } P_2(x) = P_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$



Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3\cos(k\theta)}{k(k+1)} \ \ (\theta \geq 0) \qquad\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n}{2n}.$$

Solution.
(1) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
(2) Série divergente car son terme général ne tend pas vers zéro.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{k}} \quad (2)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k+5)(2k+7)} \quad (3)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right] \quad (4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x+1)}{n!}\ (x > -1).$$

Solution.

(1) Série de Riemann divergente car $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.

(2) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{1}{7}$

(3) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{7}{6}$

(4) Série exponentielle ; la somme de la série vaut x.