1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

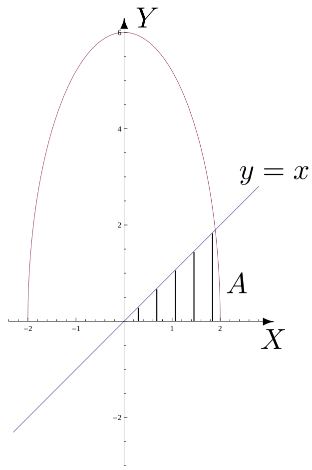
Répétition 1 Biologie : correction

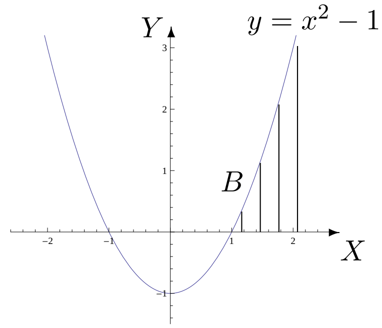
Version 1er février 2013

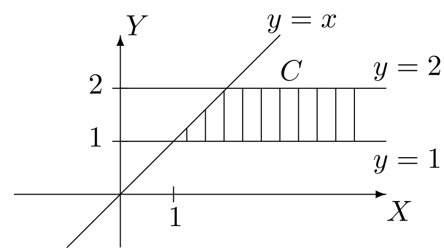
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

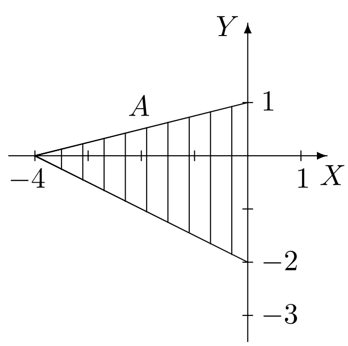
   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{36 - 9x^2}\}\}$
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2 - 1\}$
   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [1, 2]\}$

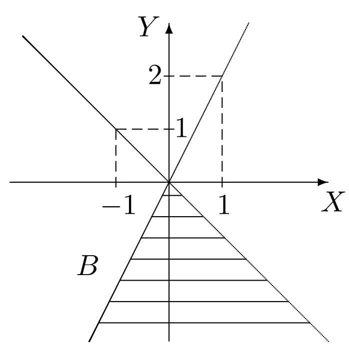


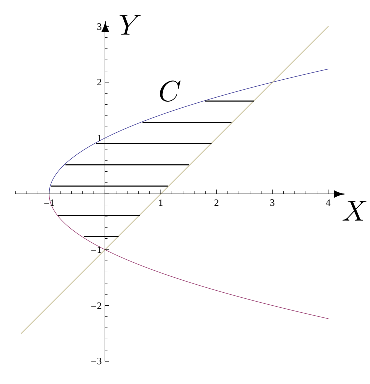




2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.







Les descriptions analytiques sont les suivantes

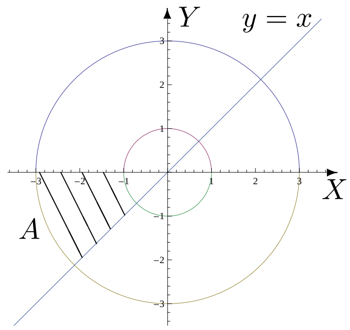
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 0],\ y \in [-\frac{x}{2} - 2, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 0],\ x \in [-2(y+2), 0]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

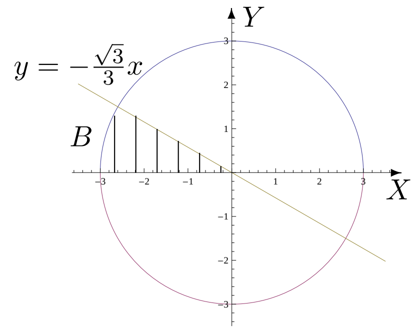
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\,]-\infty, 0],\ y \in]-\infty, 2x]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in]-\infty, -x]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in] -\infty, 0],\ x \in [\ \frac{y}{2}, -y]\}$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-\sqrt{x+1}, \sqrt{x+1}]\}$
$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 3],\ y \in [x - 1, \sqrt{x+1}]\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,2],\ x \in [y^2-1, y+1]\}$
.

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble.**





Les descriptions analytiques sont les suivantes

$$A = \left\{(r,\theta) : r \in [1,3],\ \theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(r,\theta) : r \in]0,3],\ \theta \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
   a) $f : x \mapsto |x^2-9|$ et $x_0 = 2$
   b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ et $x_0 = 3$
   Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 2 vaut -4 et celle de g en 3 vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-2,2[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\sqrt{x^2-1})$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?**
   Le domaine de dérivabilité de F est $]-\sqrt{5},-1[\ \cup\ ]1,\sqrt{5}[$ et sa dérivée vaut
   $$DF(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(Df)(\sqrt{x^2-1}).$$
   b) Même question pour g dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},0[$ avec $G(x) = g(\arcsin(3x-1))$.
   Le domaine de dérivabilité de G est $\left]0, \frac{1}{3}\right[$ et sa dérivée vaut
   $$DG(x) = \frac{3}{\sqrt{-9x^2+6x}}(Dg)(\arcsin(3x-1)).$$

III. Cacul intégral

1. a) **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0,1]$, la fonction $f_1 : x \mapsto a^2\cos(ax)$ est-elle intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$; elle y est donc intégrable et son intégrale

vaut $a \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$.

b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
La fonction est continue sur le fermé borné $[0, a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a \ln 2\ .\ e^{a^2}$.

c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2-a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
La fonction est continue sur $]a, +\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$ mais non en a^+. Cette fonction n'est donc pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**

$$a) \int_0^e \ln(x)\ dx \qquad\qquad b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\ dx$$

Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut 0 et la deuxième $\dfrac{\pi}{8}$.

3. **On considère l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\dfrac{3x}{2} \leq y \leq \dfrac{3x}{2},\ y \geq x^2 - 1\right\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
L'aire de la région hachurée vaut $\dfrac{33}{16}$.