1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

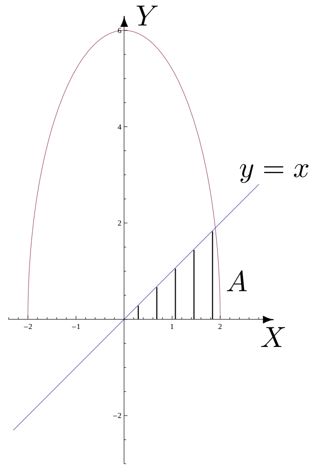
Répétition 1 Géologie : correction

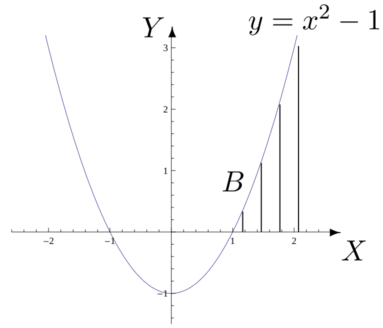
Version 1er février 2013

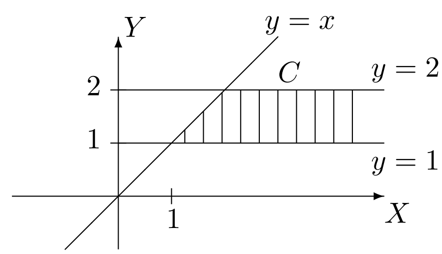
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

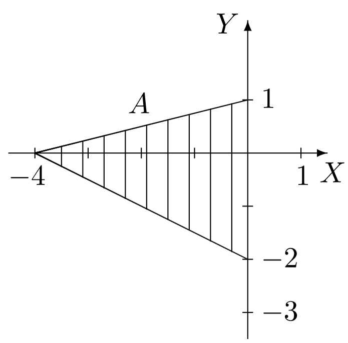
   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{36 - 9x^2}\}\}$
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2 - 1\}$
   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [1, 2]\}$

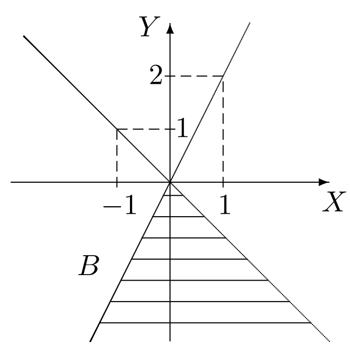


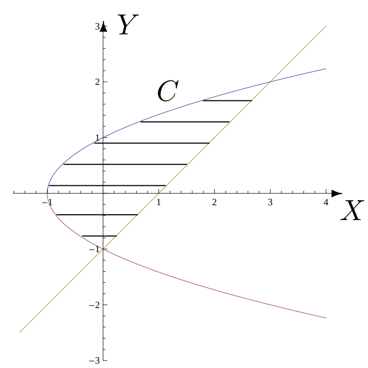




2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.







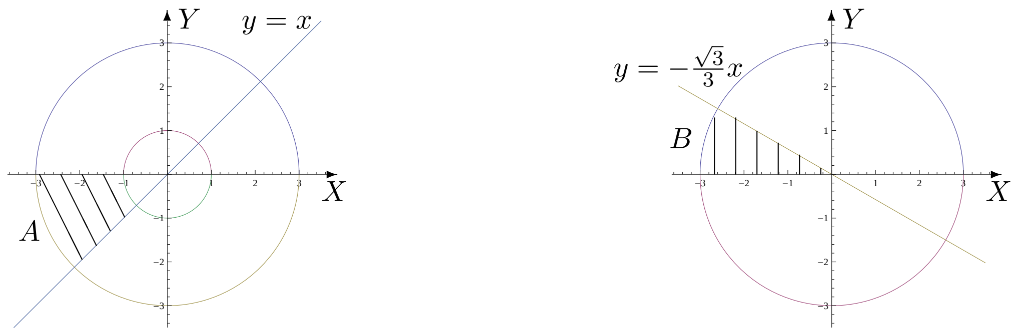
Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 0],\ y \in [-\frac{x}{2} - 2, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 0],\ x \in [-2(y+2), 0]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in]-\infty, 2x]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in]-\infty, -x]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-\infty, 0],\ x \in [\ \frac{y}{2}, -y]\}$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-\sqrt{x+1}, \sqrt{x+1}]\}$
$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 3],\ y \in [x - 1, \sqrt{x+1}]\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,2],\ x \in [y^2-1, y+1]\}$
.

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble.**



Les descriptions analytiques sont les suivantes

$$A = \left\{(r,\theta) : r \in [1,3],\ \theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(r,\theta) : r \in]0,3],\ \theta \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
   a) $f : x \mapsto |x^2 - 9|$ et $x_0 = 2$
   b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ et $x_0 = 3$
   Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 2 vaut -4 et celle de g en 3 vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-2,2[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\sqrt{x^2-1})$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?**
   Le domaine de dérivabilité de F est $]-\sqrt{5},-1[\, \cup\,]1,\sqrt{5}[$ et sa dérivée vaut
   $$DF(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(Df)(\sqrt{x^2-1}).$$
   b) Même question pour g dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},0[$ avec $G(x) = g(\arcsin(3x-1))$.
   Le domaine de dérivabilité de G est $\left]0, \frac{1}{3}\right[$ et sa dérivée vaut
   $$DG(x) = \frac{3}{\sqrt{-9x^2+6x}}(Dg)(\arcsin(3x-1)).$$

III. Cacul intégral

1. a) **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0,1]$, la fonction $f_1 : x \mapsto a^2\cos(ax)$ est-elle intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,\frac{\pi}{2}]$; elle y est donc intégrable et son intégrale

vaut $a \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$.

b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
La fonction est continue sur le fermé borné $[0, a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a \ln 2\ .\ e^{a^2}$.

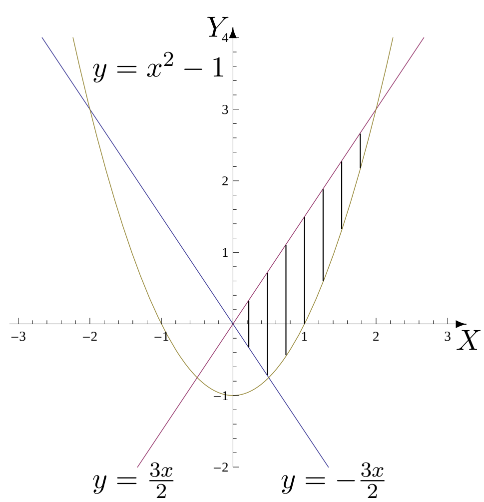
c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2-a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
La fonction est continue sur $]a, +\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$ mais non en a^+. Cette fonction n'est donc pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**

$$a) \int_0^e \ln(x)\ dx \qquad\qquad b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\ dx$$

Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut 0 et la deuxième $\frac{\pi}{8}$.

3. **On considère l'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{3x}{2} \leq y \leq \frac{3x}{2},\ y \geq x^2 - 1\right\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
L'aire de la région hachurée vaut $\frac{33}{16}$.



IV. Divers

1. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A - 0,78).0,22}$$

Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

La quantité de matière A introduite dans le milieu réactionnel vaut 1,001 mol.

2. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**
$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5-x)(0,25-x)}$$
Que vaut x sachant que $x \in]0; 0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?

Le nombre de moles par litre de produit formé vaut $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ donc approximativement 0,146 mol/L.

3. **En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à 17 % de la quantité initiale.**
Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

a) La demi-vie du carbone-14 est de 5 728 années.
b) L'arbuste a 14 644 ans.

4. **Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle**
$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2}\sin^2\theta - \cos\theta,\ \ \theta \in [-\pi, \pi]$$
où n est un paramètre réel strictement positif. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de ν (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).
Déterminer les positions (éventuelles) d'équilibre du système.

Les extrema éventuels sont compris dans l'ensemble des zéros de la dérivée première de ν.
Si $n \in]0, 1]$ les zéros sont $-\pi,\ 0$ et π.
Si $n > 1$, les zéros sont $-\pi,\ 0,\ \pi$ et $\pm\text{arcos}(\frac{1}{n^2})$.

Pour avoir un extremum, la dérivée doit changer de signe de part et d'autre du zéro. Dès lors,
- si $n \in]0, 1]$, on a un maximum en $-\pi$ et π et un minimum en 0
- si $n > 1$, on a un maximum en $-\pi,\ 0$ et π et un minimum en $\pm\text{arcos}(\frac{1}{n^2})$.