
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

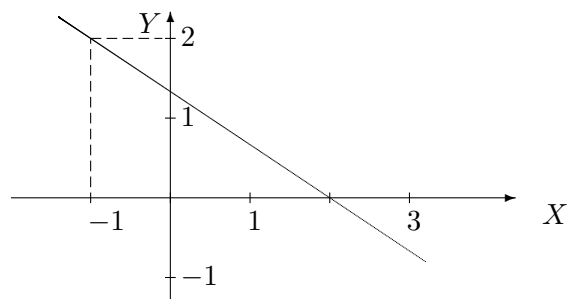
Année académique 2012-2013

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉPÉTITION 2 : CORRECTION

I. Equations cartésiennes de droites

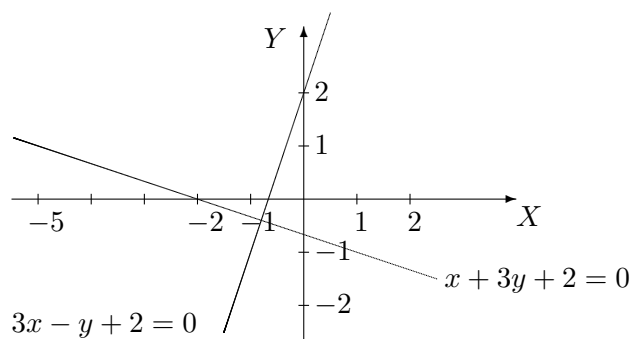
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Sans en déterminer l'équation cartésienne, représenter graphiquement la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(-1, 2)$ et de coefficient angulaire $-\frac{2}{3}$.

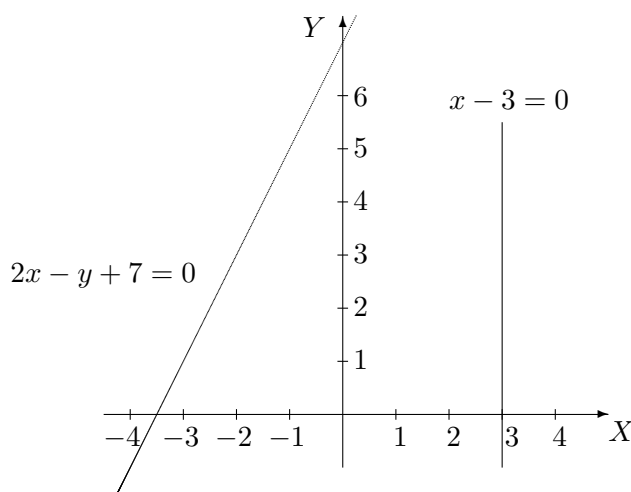


2. Donner l'équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnée $(0, 2)$ et orthogonale à la droite d'équation $x + 3y + 2 = 0$. Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.

L'équation cartésienne demandée est $3x - y + 2 = 0$.



3. a) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(-2, 3)$ et $(-3, 1)$ ainsi que celle de la droite passant par $(3, -2)$ et $(3, 0)$. La première droite a pour équation cartésienne $2x - y + 7 = 0$; la deuxième a pour équation $x - 3 = 0$.
b) Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.



4. On considère la droite d'équation cartésienne $3x - 2y + 4 = 0$.

a) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.

Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes $(2, 3)$ (ou tout autre multiple non nul).

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.

Un point de cette droite a pour coordonnées $(0, 2)$ par exemple.

c) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.

Des équations paramétriques cartésiennes de cette droite sont données par

$$\begin{cases} x = 2r \\ y = 3r + 2 \end{cases}, r \in \mathbb{R}$$

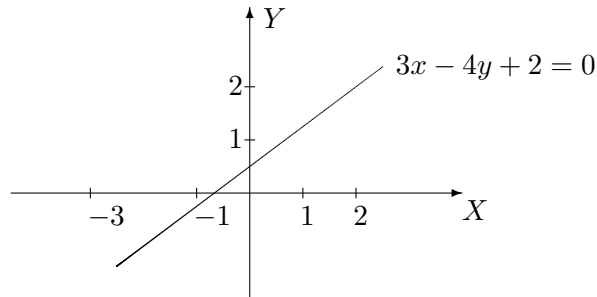
d) La droite passe par le point de coordonnées $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 2)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point?

Vu les équations paramétriques données au point précédent, ce point correspond à $r = \sqrt{3}$.

II. Résolution de systèmes linéaires

1. a) Si on considère l'équation $4y - 3x = 2$, représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans un repère cartésien du plan. Quel est le nom de cette courbe?

Cette courbe est une droite dont voici la représentation graphique.



b) Résoudre le système $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y - x = 5 \end{cases}$

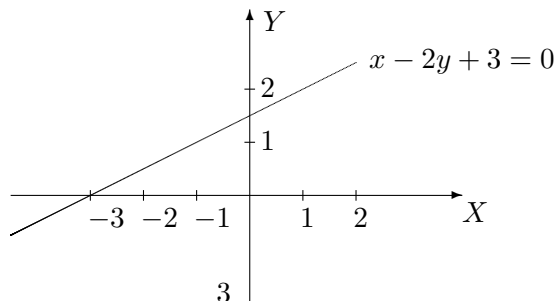
Ne pas oublier de mentionner l'ensemble des solutions.

L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \{(-1, 2)\}$.

c) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions?

Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites sécantes au point de coordonnées $(-1, 2)$.

2. a) Dans le plan, représenter graphiquement les solutions du système $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 10 = 4 \end{cases}$



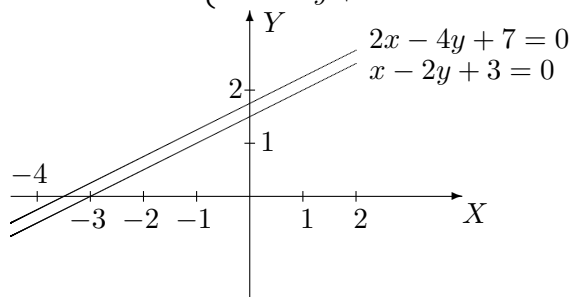
b) **Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?**

Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites parallèles confondues. Les solutions du système sont donc les points de la droite.

c) **Résoudre ce système et donner son ensemble de solutions.**

Son ensemble de solutions est l'ensemble $S = \{(2y - 3, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

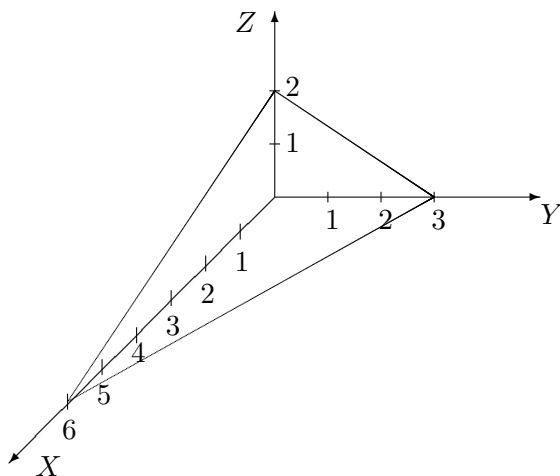
d) **Faire de même avec le système**
$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 7 = 0 \end{cases}$$



Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites parallèles et distinctes. L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \emptyset$.

3. a) **Si on considère l'équation $2y + x + 3z = 6$, comment peut-on représenter graphiquement les solutions dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom de cet élément ?**

Cette équation est l'équation cartésienne d'un plan dont voici la représentation graphique.



b) **Si on a un système formé de deux équations de ce type, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.**

Trois cas sont possibles :

- 1) 2 plans sécants ; ils ont une droite de points en commun et leur ensemble de solutions dépend d'un paramètre
- 2) 2 plans parallèles confondus ; ils ont tous leurs points en commun et leur ensemble de solutions dépend de 2 paramètres
- 3) 2 plans parallèles distincts ; ils n'ont aucun point en commun et leur ensemble de solu-

tions est l'ensemble vide.

c) Résoudre
$$\begin{cases} 2y + x + 3z = 6 \\ 2y - x + 5z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble de solutions est donné par $S = \{(z + 3, \frac{3}{2} - 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

III. Trigonométrie

1. a) Si $x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, dans quel quadrant travaille-t-on ?

On travaille dans le troisième quadrant.

b) Dans ce quadrant, on sait que $\cotg(x) = \frac{4}{3}$. Sans utiliser de calculatrice, déterminer la valeur des trois autres nombres trigonométriques ?

On a $\operatorname{tg}(x) = \frac{3}{4}$, $\cos(x) = -\frac{4}{5}$ et $\sin(x) = -\frac{3}{5}$.

2. a) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $\frac{1}{\sin(x)\cos(x)} - \operatorname{tg}(x) - \cotg(x)$ est-elle définie ?

L'expression est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) En simplifiant cette expression, montrer qu'elle est indépendante de x .

Cette expression vaut 0 ; elle est donc indépendante de x .

3. a) Rapprocher $\sin^4(x) - 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$ d'un produit remarquable qui permettrait de simplifier cette expression. Laquelle envisager ?

On peut envisager le carré d'une différence de 2 termes donc, par exemple, l'expression $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Transformer l'expression ci-dessus en utilisant la formule trouvée pour simplifier au maximum cette expression.

L'expression donnée peut donc s'écrire sous la forme $(\cos^2(x) - \sin^2(x))^2 = \cos^2(2x)$.

4. a) Parmi les formules de trigonométrie, quelle est celle qui permet de transformer un double produit de sinus cosinus ? La citer.

Pour transformer un double produit de sinus cosinus, on utilise la formule

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Prouver que $4 \sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \sqrt{2} + 1$.

5. a) Résoudre l'équation $\cos(4x) = \sin(2x)$ (note : x est l'inconnue réelle)

Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$.

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont

$$\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12} = \frac{7\pi}{4}, \frac{25\pi}{12}, \frac{29\pi}{12}, \frac{33\pi}{12} = \frac{11\pi}{4}.$$

6. a) Résoudre l'équation $\cos(4x) = \cos(2x)$ (note : x est l'inconnue réelle)

Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{ \frac{k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.

7. a) Si un produit de 2 facteurs est négatif, que peut-on affirmer à propos de ces facteurs ?

Si un produit de 2 facteurs est négatif alors ces facteurs sont de signe contraire, l'un positif et l'autre négatif.

- b) Transformer $\sin(2x)$ en un produit de 2 facteurs.

On a la formule $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- c) Résoudre $\sin(x) \leq \sin(2x)$ (note : x est l'inconnue réelle)

L'ensemble des solutions est donné par

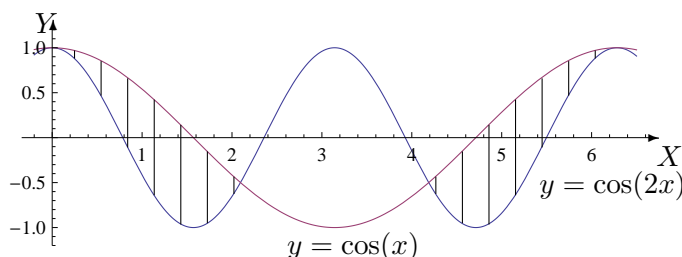
$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \cup \left[\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right] \right).$$

- d) Parmi toutes les solutions, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right] \cup \{2\pi\}$.

8. On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi], \cos(2x) \leq y \leq \cos x\}.$$



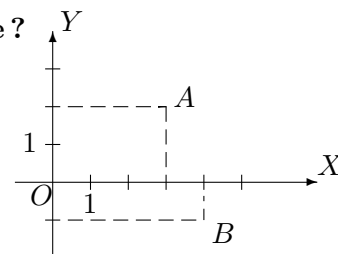
IV. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

1. a) Quelles sont les composantes des vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} dans la base correspondant au repère orthonormé ci-contre ?

Les composantes des vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} sont respectivement $(3, 2)$ et $(4, -1)$.

- b) Donner les composantes de $2\vec{AB}$

Les composantes de $2\vec{AB}$ sont $(2, -6)$.

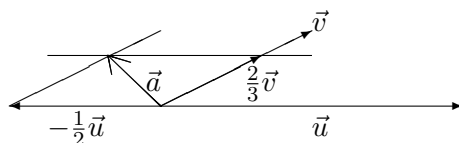


2. Soit la base du plan définie par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

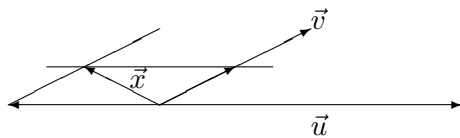
- a) Si $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$, donner les composantes de \vec{a} dans la base \vec{u} , \vec{v} .

Dans la base \vec{u} , \vec{v} , les composantes de \vec{a} sont $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.

- b) Représenter \vec{a} .



c) On considère le vecteur \vec{x} . Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} puis en donner les composantes dans cette base.



Comme $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, ses composantes dans la base \vec{u}, \vec{v} sont $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

a) Si $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$, quelles sont les composantes de \vec{a} dans cette base?

Dans cette base, les composantes de \vec{a} sont $(-\frac{1}{3}, -3, 0)$.

b) De même pour $\vec{b} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$.

Dans cette base, les composantes de \vec{b} sont $(-1, 1, -2)$.

c) Déterminer le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

Le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$ vaut $-\frac{8}{3}$.

d) Déterminer le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$.

Le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$ est le vecteur de composantes $(-6, \frac{2}{3}, \frac{10}{3})$.

e) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge 3\vec{a}$, celles de $\vec{y} = (\vec{a} \bullet 2\vec{b})\vec{a}$ et celles de $\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$.

Les composantes des différents vecteurs sont les suivantes

$$\vec{x}(16, 0, -14), \quad \vec{y}\left(\frac{16}{9}, 16, 0\right) \quad \text{et} \quad \vec{z}\left(-10, \frac{10}{9}, -\frac{164}{9}\right).$$