1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 2 Biologie : correction

Version 19 février 2013

I. Définitions et représentations graphiques

1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

$$f(x,y) = \ln\left(4y^2 - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{4 - |x - 2y|}, \quad h(x,y) = \text{arcos}\left(\frac{xy}{2}\right).$$

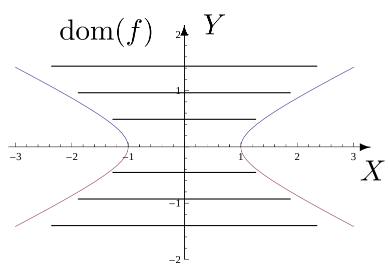
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1,-2,)$ **par** f**, de** $(5,3)$ **par** g **et de** $(-1,1)$ **par** h**.**

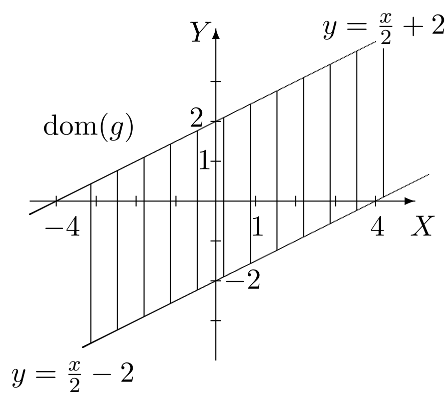
Les domaines de définition sont les suivants :

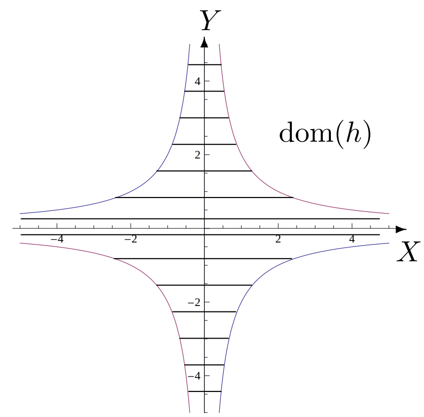
• $\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1,-2)$ appartient à $\text{dom}(f)$, on a $f(1,-2) = 4\ln(2)$.

• $\text{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x - 2y \leq 4\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(5,3)$ appartient à $\text{dom}(g)$, on a $g(5,3) = \sqrt{3}$.

• $\text{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq xy \leq 2\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(-1,1)$ appartient à $\text{dom}(h)$, on a $h(-1,1) = \frac{2\pi}{3}$.





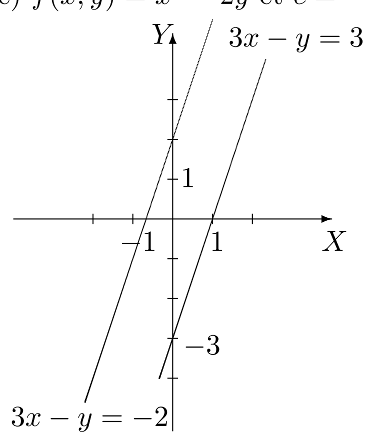


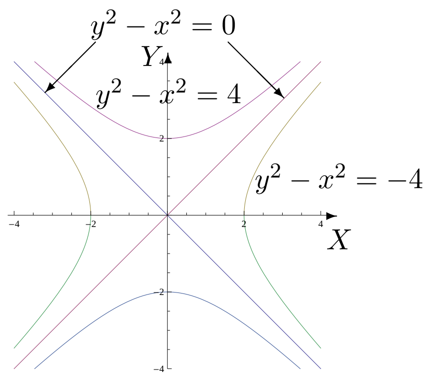
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation** $f(x,y) = c$ **si**

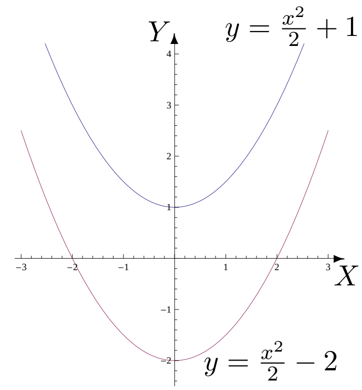
a) $f(x,y) = 3x - y$ et $c = -2,\ 3$

b) $f(x,y) = y^2 - x^2$ et $c = -4,\ 0,\ 4$

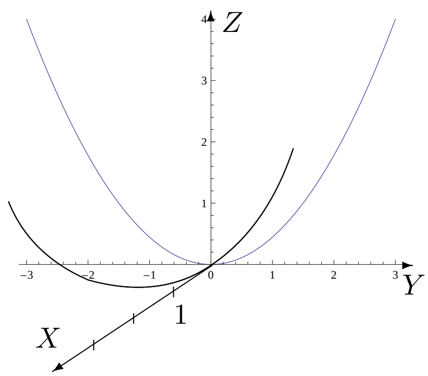
c) $f(x,y) = x^2 - 2y$ et $c = -2,\ 4$





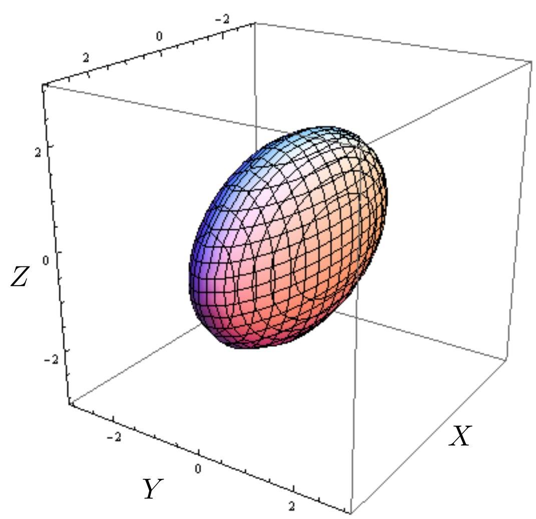


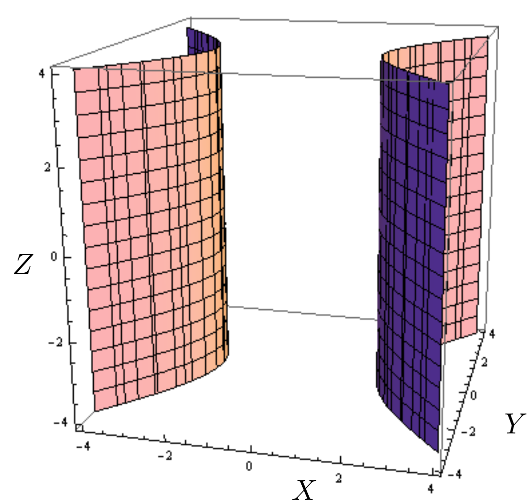
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 9z$ dans le plan d'équation $x = 0$ puis dans celui d'équation $y = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
   La trace dans le plan d'équation $x = 0$ est une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z ; celle dans le plan d'équation $y = 0$ est aussi une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z (cf. graphique).
   Cette quadrique est un paraboloïde elliptique.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\ \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad\qquad b)\ x^2 - y^2 = 4.$$





II. Dérivation et gradient

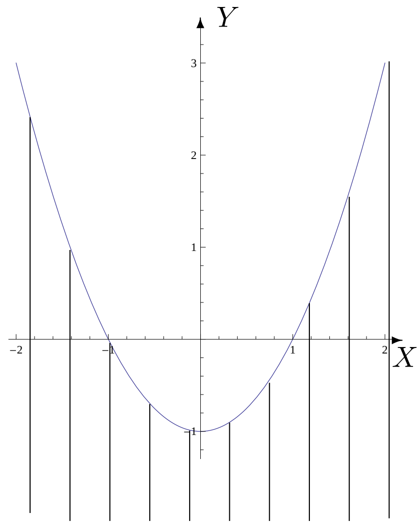
1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x, y) = 2x^3 + xy^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**

La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut 10.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y)=\ln(x^2-1-y),\quad g(x,y)=\sin(x^3y^2+3y)\quad \textbf{et}\quad h(x,y)=y^2\,e^{-\frac{y}{x}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-1-y>0\}$. La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_xf(x,y)=\frac{2x}{x^2-1-y}$$

et

$$D_yf(x,y)=\frac{-1}{x^2-1-y}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan. Les dérivées partielles sont données par

$$D_xg(x,y)=3x^2y^2\cos(x^3y^2+3y)\qquad \text{et}\qquad D_yg(x,y)=(2x^3y+3)\cos(x^3y^2+3y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):x=0\}=\mathbb{R}_0\times\mathbb{R}$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des ordonnées. Les dérivées partielles sont données par

$$D_xh(x,y)=\frac{y^3}{x^2}\,e^{-\frac{y}{x}}\qquad \text{et}\qquad D_yh(x,y)=\left(2-\frac{y}{x}\right)y\,e^{-\frac{y}{x}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2-4y^2})$.**
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2f+D_y^2f$.

Les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-4y^2>0\}$ et on a

$$D_x^2f(x,y)+D_y^2f(x,y)=\frac{-5(x^2+4y^2)}{(x^2-4y^2)^2}.$$

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\,x_2^3\sin(x_1x_3)$.**
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z)=y^2e^{x^2y\sqrt{2z}}$.

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(x_2^3\sin(x_1x_3)+x_1\,x_2^3\,x_3\cos(x_1x_3),\ 3x_1\,x_2^2\sin(x_1x_3),\ x_1^2\,x_2^3\cos(x_1x_3)).$$

b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$\left(2xy^3\sqrt{2z}\,e^{x^2y\sqrt{2z}},\ (2+x^2y\sqrt{2z})y\,e^{x^2y\sqrt{2z}},\ \frac{x^2y^3}{\sqrt{2z}}\,e^{x^2y\sqrt{2z}}\right).$$

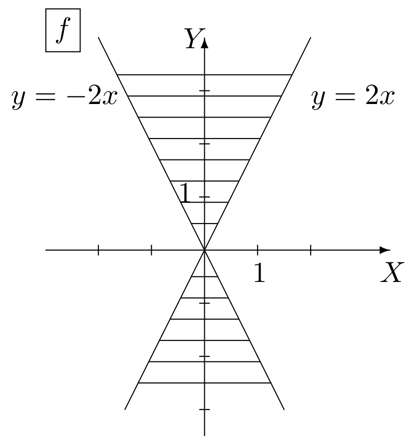
5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x^2-y+1}).$$

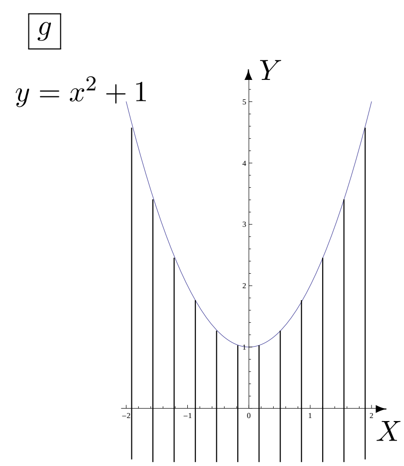
a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $\frac{|x|}{|y|}D_xf(x,y) + D_yf(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
a) Pour f, on a

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{2x}{y} \leq 1,\ y \neq 0\right\} \text{ et } B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{2x}{y} < 1 y \neq 0\right\}.$$

Pour g, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y + 1 \geq 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y + 1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$\frac{|x|}{|y|}D_xf(x,y) + D_yf(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \geq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ \dfrac{-4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \text{ et } y > 0 \\ \dfrac{4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(2t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est

$$DF(t) = \frac{4t}{\sqrt{1-4t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t)$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{1-\cos(2t)})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est

$$DG(t) = \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1-\cos(2t)}} \exp(\sqrt{1-\cos(2t)}).$$