1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 2 Chimie, Géographie, Physique : correction

Version 19 février 2013

I. Définitions et représentations graphiques

1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

$$f(x,y) = \ln\left(4y^2 - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{4 - |x - 2y|}, \quad h(x,y) = \text{arcos}\left(\frac{xy}{2}\right).$$

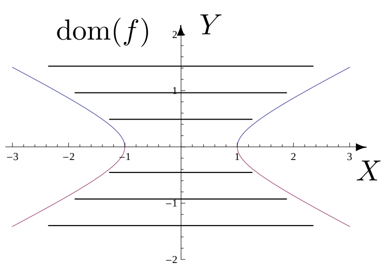
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1,-2,)$ **par** f**, de** $(5,3)$ **par** g **et de** $(-1,1)$ **par** h**.**

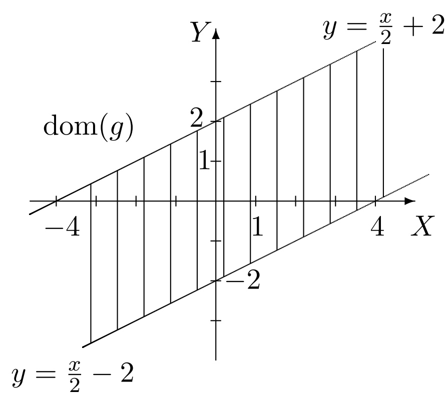
Les domaines de définition sont les suivants :

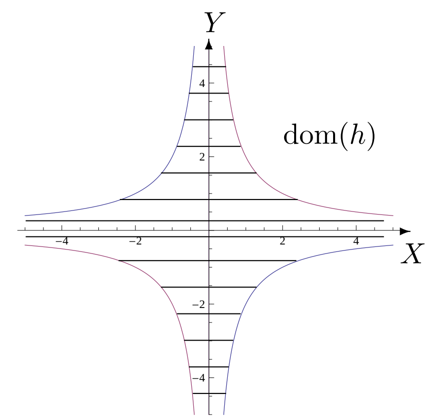
• $\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1,-2)$ appartient à $\text{dom}(f)$, on a $f(1,-2) = 4\ln(2)$.

• $\text{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x - 2y \leq 4\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(5,3)$ appartient à $\text{dom}(g)$, on a $g(5,3) = \sqrt{3}$.

• $\text{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq xy \leq 2\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(-1,1)$ appartient à $\text{dom}(h)$, on a $h(-1,1) = \frac{2\pi}{3}$.





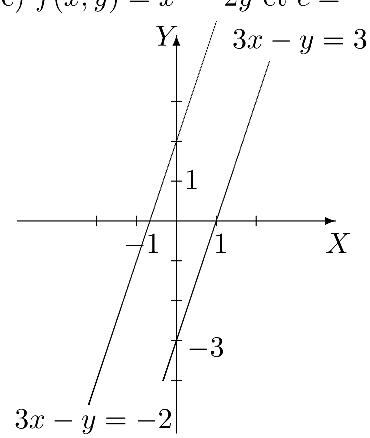


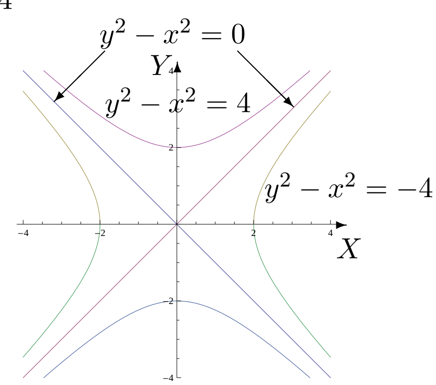
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation** $f(x,y) = c$ **si**

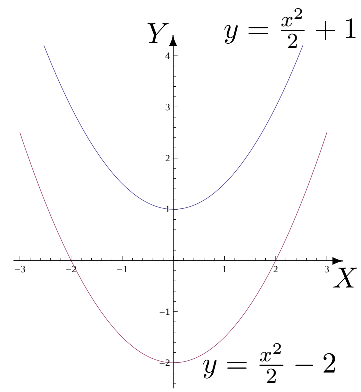
a) $f(x,y) = 3x - y$ et $c = -2,\ 3$

b) $f(x,y) = y^2 - x^2$ et $c = -4,\ 0,\ 4$

c) $f(x,y) = x^2 - 2y$ et $c = -2,\ 4$

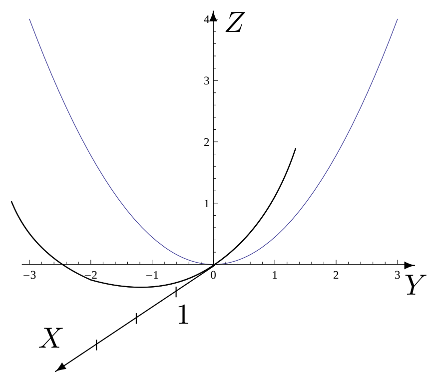






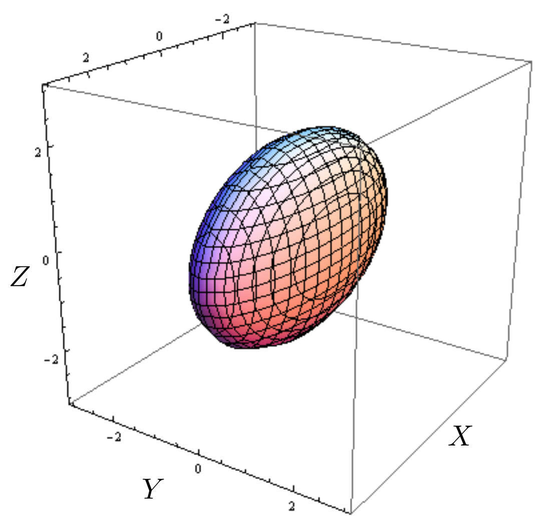
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 9z$ dans le plan d'équation $x = 0$ puis dans celui d'équation $y = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**

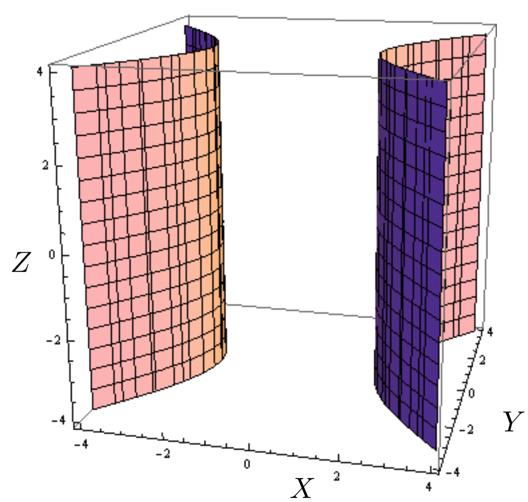
   La trace dans le plan d'équation $x = 0$ est une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z ; celle dans le plan d'équation $y = 0$ est aussi une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z (cf. graphique).
   Cette quadrique est un paraboloïde elliptique.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\ \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad\qquad b)\ x^2 - y^2 = 4.$$





II. Dérivation et gradient

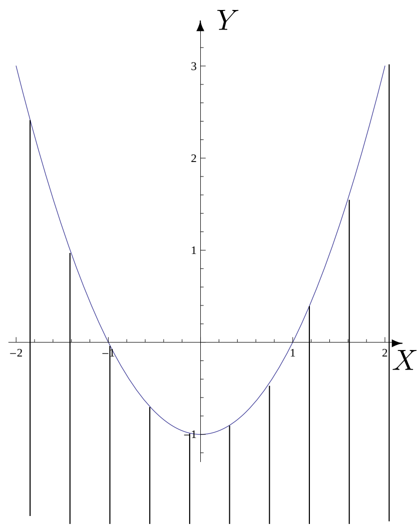
1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x, y) = 2x^3 + xy^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**

La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut 10.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x, y) = \ln(x^2 - 1 - y), \quad g(x, y) = \sin(x^3y^2 + 3y) \quad \textbf{et} \quad h(x, y) = y^2\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 - y > 0\}$. La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x, y) = \frac{2x}{x^2 - 1 - y}$$

et

$$D_y f(x, y) = \frac{-1}{x^2 - 1 - y}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x, y) = 3x^2y^2 \cos(x^3y^2 + 3y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x, y) = (2x^3y + 3)\cos(x^3y^2 + 3y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des ordonnées. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x, y) = \frac{y^3}{x^2}\, e^{-\frac{y}{x}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x, y) = \left(2 - \frac{y}{x}\right) y\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 - 4y^2})$.**
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

Les 2 domaines sont égaux à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 > 0\}$ et on a

$$D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y) = \frac{-5(x^2 + 4y^2)}{(x^2 - 4y^2)^2}.$$

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2^3 \sin(x_1x_3)$.**
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x, y, z) = y^2 e^{x^2y\sqrt{2z}}$.

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(x_2^3 \sin(x_1x_3) + x_1\, x_2^3\, x_3 \cos(x_1x_3),\ 3x_1\, x_2^2 \sin(x_1x_3),\ x_1^2\, x_2^3 \cos(x_1x_3)).$$

b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$\left(2xy^3\sqrt{2z}\, e^{x^2y\sqrt{2z}},\ (2+x^2y\sqrt{2z})y\, e^{x^2y\sqrt{2z}},\ \frac{x^2y^3}{\sqrt{2z}}\, e^{x^2y\sqrt{2z}}\right).$$

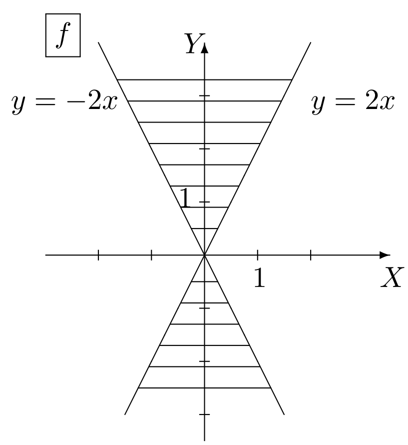
5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x^2-y+1}).$$

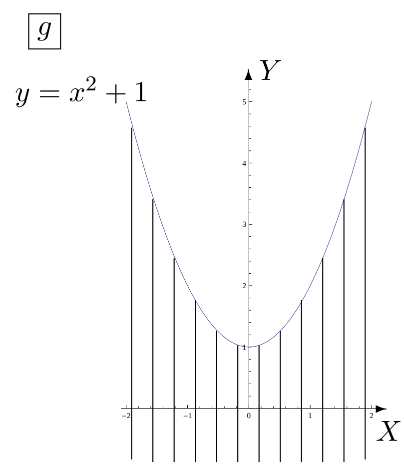
a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $\frac{|x|}{|y|}D_xf(x,y) + D_yf(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
a) Pour f, on a

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{2x}{y} \leq 1,\ y \neq 0\right\} \text{ et } B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{2x}{y} < 1,\ y \neq 0\right\}.$$

Pour g, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y+1 \geq 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y+1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$\frac{|x|}{|y|}D_xf(x,y) + D_yf(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ xy \geq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ \dfrac{-4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si } \ x \leq 0 \text{ et } y > 0 \\ \dfrac{4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si } \ x \geq 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(2t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est

$$DF(t) = \frac{4t}{\sqrt{1-4t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t)$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{1-\cos(2t)})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est

$$DG(t) = \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1-\cos(2t)}} \exp(\sqrt{1-\cos(2t)}).$$

6. **On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y)),\ (x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

   On a $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et F est la fonction constante 1.

7. **On considère la fonction $f_r(x,y) = y^r e^{-\frac{x}{y}},\ r$ étant un réel.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Déterminer le réel r tel que $D_y f_r(x,y) = y D_x^2 f_r(x,y) - \frac{x}{y} D_x f_r(x,y),\ (x,y) \in B$.

   On a $A = B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ et le réel r vérifiant l'égalité donnée vaut 1.

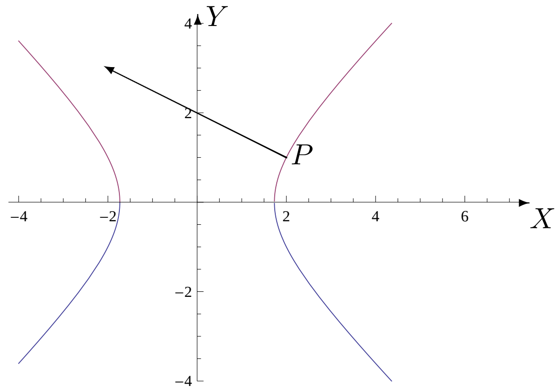
8. **On donne la fonction $f(x,y) = \cos(ax)\sin(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \frac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.**
La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie bien l'équation des ondes.

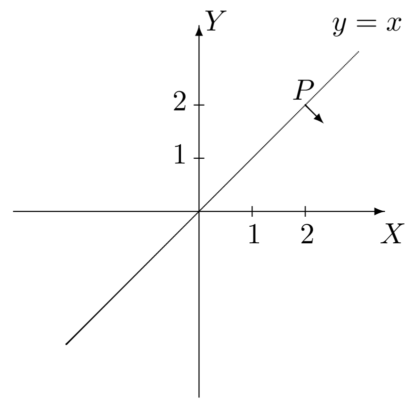
9. **L'expérience montre que, dans un champ de températures, la chaleur s'écoule dans la direction dans laquelle la température décroît le plus vite. Trouver cette direction en toute généralité puis en un point P donné dans les cas suivants :**
a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour cordonnées $(2,1)$
b) $T(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour cordonnées $(2,2)$
Esquisser cette direction en P par un vecteur.
Représenter aussi l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second.

   En toute généralité, le gradient est un vecteur dont le sens est celui de la direction dans laquelle T croît le plus vite. Puisque la chaleur s'écoule dans la direction dans laquelle la température décroît le plus vite, on considère l'opposé du vecteur gradient de T c'est-à-dire le vecteur de composantes

$$\text{a) } (-2x, 2y) \qquad \text{b) } \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

   Au point P, on a respectivement les vecteurs de composantes $(-4,2)$ et $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.





Le point $(0, 0)$ n'appartient pas à l'isotherme