1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Répétition 3 : correction

Version 8 octobre 2012(V1 : 29/08/09)

I. Les coniques

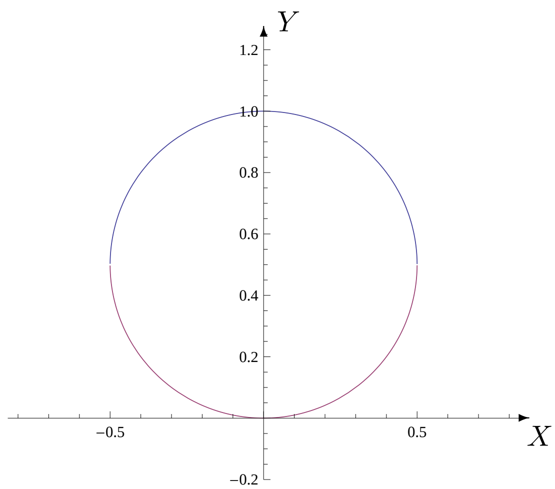
1. **Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes**

$$(1)\ x^2 - \frac{y^2}{9} = 4 \qquad (2)\ x = y^2 - 2 \qquad (3)\ x^2 + \frac{y^2}{9} = 4 \qquad (4)\ x^2 + y^2 - y = 0$$

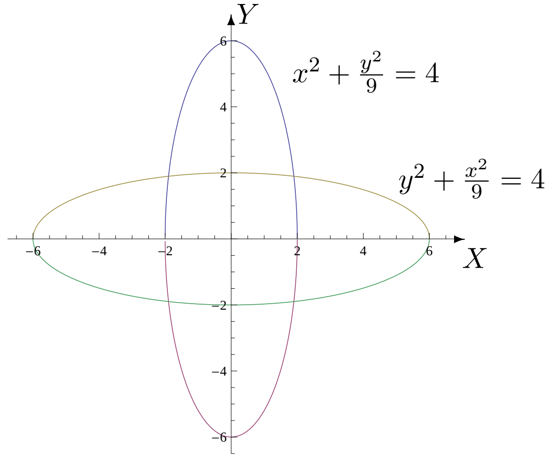
$$(5)\ x^2 = 4y^2 \qquad (6)\ \frac{y^2}{9} - x^2 = 4 \qquad (7)\ x = x^2 y \qquad (8)\ y^2 + \frac{x^2}{9} = 4$$

Quelles sont celles qui pourraient être l'équation cartésienne
a) d'un cercle ?
L' équation (4) pourrait être l'équation cartésienne d'un cercle.
b) d'une ellipse ?
Les équations (3) et (8) pourraient être l'équation cartésienne d'une ellipse.
c) d'une hyperbole ?
Les équations (1), (5) et (6) pourraient être l'équation cartésienne d'une hyperbole.
d) d'une parabole ?
L'équation (2) pourrait être l'équation cartésienne d'une parabole.

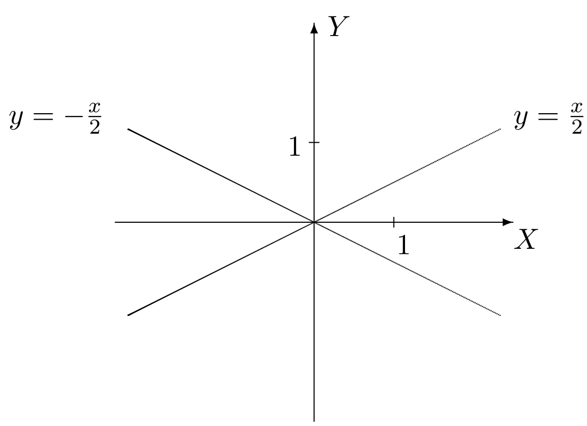
2. **a) Ecrire $y^2 - y$ sous la forme d'un carré parfait auquel on ajoute (ou on soustrait) une constante.**
On a $y^2 - y = (y^2 - y + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.
b) Déterminer les coordonnées du centre et la valeur du rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - y = 0$. Le représenter graphiquement.
Le centre du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - y = 0$ a pour coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ et son rayon vaut $\frac{1}{2}$.



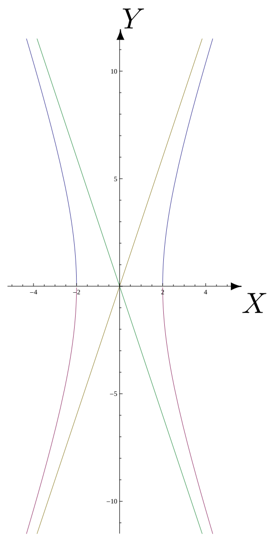
c) Pour chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent, déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection avec les axes. Les représenter graphiquement.
L'ellipse d'équation $x^2 + \frac{y^2}{9} = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 6)$ et $(0, -6)$.
L'ellipse d'équation $y^2 + \frac{x^2}{9} = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(6, 0)$, $(-6, 0)$, $(0, 2)$ et $(0, -2)$.



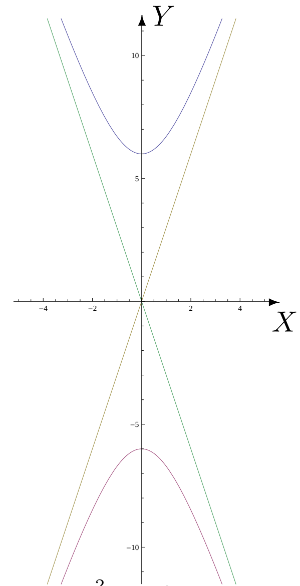
d) Donner les coordonnées des foyers et la valeur de l'excentricité des ellipses représentées ci-dessus.
Les foyers de l'ellipse d'équation (3) ont pour coordonnées $(0, 4\sqrt{2})$ et $(0, -4\sqrt{2})$; son excentricité vaut $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Les foyers de l'ellipse d'équation (8) ont pour coordonnées $(4\sqrt{2}, 0)$ et $(-4\sqrt{2}, 0)$; son excentricité vaut $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
e) Donner les coordonnées des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes des asymptotes et la valeur de l'excentricité des hyperboles repérées dans l'exercice ci-dessus.
Pour l'hyperbole d'équation $x^2 - \frac{y^2}{9} = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{10}, 0)$ et $(-2\sqrt{10}, 0)$, les sommets ont pour coordonnées $(2, 0)$ et $(-2, 0)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = 3x$ et $y = -3x$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \sqrt{10}$.
Pour l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{9} - x^2 = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{10})$ et $(0, -2\sqrt{10})$, les sommets ont pour coordonnées $(0, 6)$ et $(0, -6)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = 3x$ et $y = -3x$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$.
L'équation (5) est celle d'une hyperbole dégénérée en ses 2 asymptotes d'équation $y = \frac{x}{2}$ et $y = -\frac{x}{2}$; elle a pour représentation graphique



f) Représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.

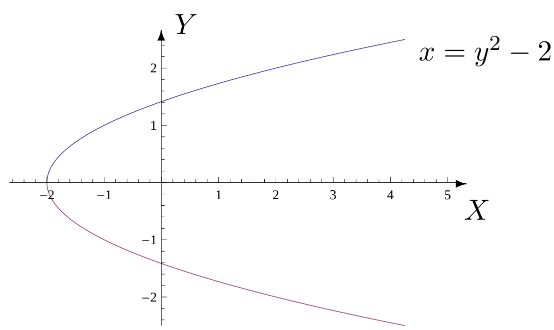


$x^2 - \frac{y^2}{9} = 4$

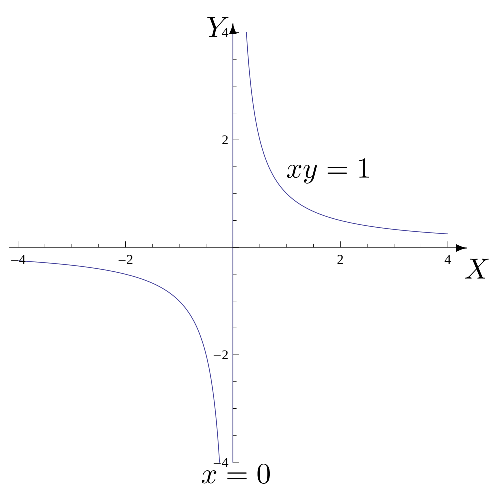


$\frac{y^2}{9} - x^2 = 4$

g) Donner les coordonnées du foyer et la valeur de l'excentricité des éventuelles paraboles repérées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement.
La parabole d'équation $x = y^2 - 2$ a un foyer dont les coordonnées sont $(-\frac{7}{4}, 0)$ et son excentricité vaut $e = 1$.



h) Si, dans l'exercice précédent, il reste des équations de courbes non encore représentées, les analyser afin d'en donner aussi une représentation graphique.
L'équation $x = x^2 y \Leftrightarrow x(1 - xy) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } xy = 1)$ a pour représentation graphique la droite d'équation $x = 0$ et l'hyperbole équilatère d'équation $y = 1/x$.



II. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(t, \sqrt{1+t^2}) : t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.

Des équations paramétriques de cette courbe sont $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.

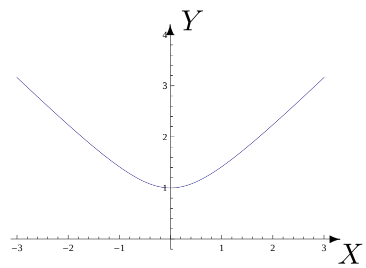
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.

En éliminant le paramètre, on obtient l'équation $y = \sqrt{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}$.

c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.

L'équation précédente se transforme en $y^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -1$ avec $y \geq 0$.

d) Représenter graphiquement la courbe.



2. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(2\sqrt{1-x^2}, x) : x \in [-1, 1]\}.$$

a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.

Des équations paramétriques de cette courbe sont $\begin{cases} x = 2\sqrt{1-t^2} \\ y = t \end{cases}, \ t \in [-1, 1]$.

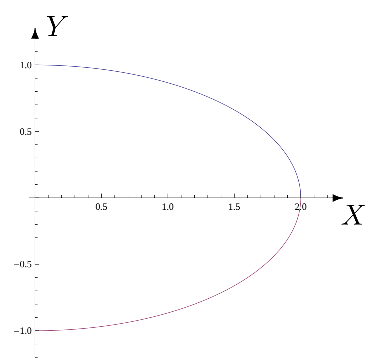
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.

En éliminant le paramètre, on obtient l'équation $x = 2\sqrt{1-y^2}, \ y \in [-1, 1]$.

c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.

L'équation précédente se transforme en $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ avec $x \geq 0$.

d) Représenter graphiquement la courbe.



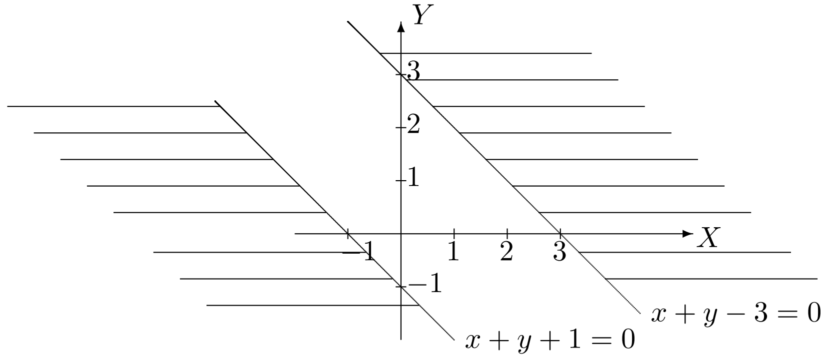
3. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x + y - 1| \geq 2\}.$$

a) Si la valeur absolue d'un nombre vaut 2, que vaut ce nombre ?

Ce nombre vaut 2 ou -2.

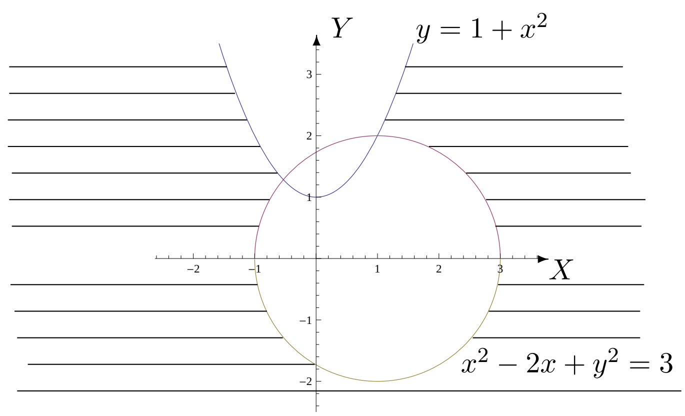
b) Comment écrire $|x+y-1|=2$ de façon équivalente ?
L'équation $|x+y-1|=2$ est équivalente à $x+y-3=0$ ou $x+y+1=0$.
c) Représenter graphiquement la (les) équation(s) obtenue(s) ci-dessus.
d) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné en la(les) hachurant. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points des ≪ bords ≫ sont compris dans l'ensemble.



4. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y\in\mathbb{R},\ y\le 1+x^2 \text{ et } x^2-2x+y^2\ge 3\right\}.$$

a) Représenter la courbe d'équation $y=1+x^2$ ainsi que celle d'équation $x^2-2x+y^2=3$.
b) Déterminer la région du plan qui correspond à $y\le 1+x^2$.
c) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à $x^2-2x+y^2\ge 3$.
d) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points des ≪ bords ≫ sont compris dans l'ensemble.

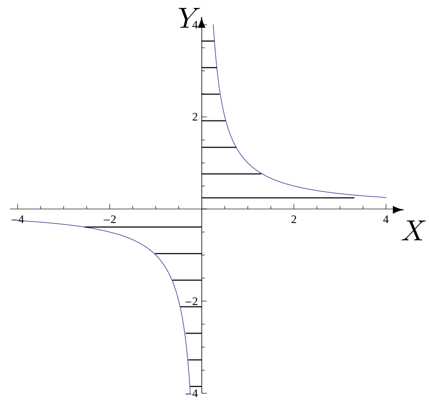


5. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y\in\mathbb{R},\ \frac{1}{xy}\ge 1\right\}.$$

a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
Puisque $xy\neq 0$, les points des axes ne peuvent appartenir à l'ensemble.
b) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
c) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné.

Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais non les points des axes.



6. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x^2 - y^2} \leq -1\right\}.$$

a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?

Puisque $x^2 - y^2 \neq 0$, les points des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ ne peuvent appartenir à l'ensemble.

b) Si $P_1(x, y)$ avec $x, y > 0$ appartient à l'ensemble, que peut-on dire des points $P_2(-x, y)$, $P_3(-x, -y)$, $P_4(x, -y)$ à propos de leur éventuelle appartenance à l'ensemble ?

Si $P_1(x, y)$ avec $x, y > 0$ appartient à l'ensemble alors les points $P_2(-x, y)$, $P_3(-x, -y)$ et $P_4(x, -y)$ appartiennent aussi à l'ensemble.

c) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.

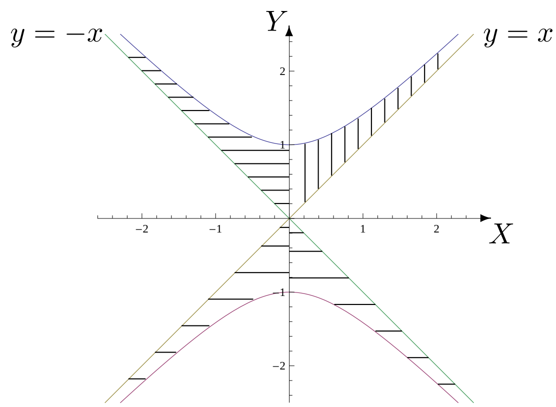
d) Quel est le signe de la fraction $\frac{1}{x^2 - y^2}$? Que peut-on en déduire ?

La fraction $\frac{1}{x^2 - y^2}$ est négative puisqu'elle est inférieure ou égale à -1. Dès lors, $x^2 - y^2 < 0$ et l'inéquation est équivalente à $0 < y^2 - x^2 \leq 1$.

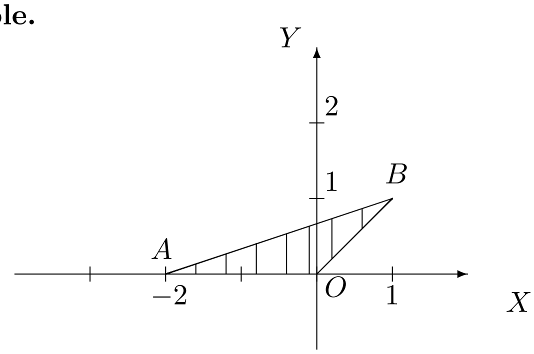
e) Dans le premier quadrant, hachurer l'ensemble des points correspondants à $\frac{1}{x^2 - y^2} \leq -1$.

f) Dans une autre couleur, hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?

Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais non ceux des asymptotes.



7. **Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.**



a) Donner les coordonnées cartésiennes des sommets du triangle ABO.

Les coordonnées des sommets sont les suivantes : $A(-2,0)$, $B(1,1)$ et $O(0,0)$.

b) Déterminer les équations cartésiennes des droites AB, BO et AO.

La droite AB a pour équation cartésienne $x-3y+2=0$.
L'équation de BO est $x-y=0$ et celle de AO est $y=0$.

c) Décrire analytiquement l'ensemble E comme dans les exercices ci-dessus.

On a $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-3y+2\geq 0,\ x-y\leq 0,\ y\geq 0\}$.

d) Quel est l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ?

L'ensemble de variation des ordonnées des points de E est $[0,1]$.

e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?

Pour un y fixé dans $[0,1]$, l'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[3y-2,y]$.

f) Donner une description analytique de E autre que celle donnée en c) en se servant des deux items précédents.

On peut aussi décrire analytiquement E par $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1],\ x\in[3y-2,y]\}$.

g) Quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?

L'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[-2,1]$.

h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, peut-on donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ? Si oui, le donner. Si

non, que doit-on faire ?

Non, y ne varie pas entre les mêmes bornes si $x \in [-2, 0]$ ou si $x \in [0, 1]$.
Si x est fixé dans $[-2, 0]$ alors y varie dans $[0, \frac{x+2}{3}]$ et si x est fixé dans $[0, 1]$ alors y varie dans $[x, \frac{x+2}{3}]$.

i) Donner une description analytique de E autre que celles données en c) et en f) en se servant des deux items précédents.

On a aussi la description suivante

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in \left[0, \frac{x+2}{3}\right]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in \left[x, \frac{x+2}{3}\right]\right\}.$$