
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

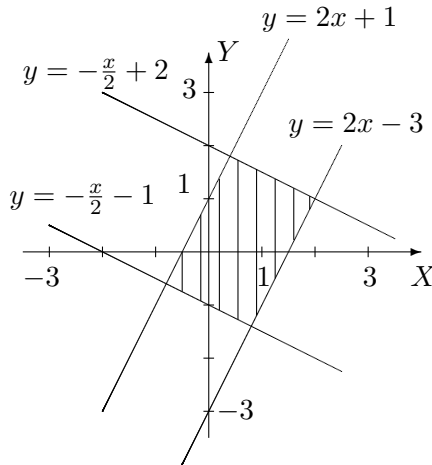
Année académique 2012-2013

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (PARTIM B)

RÉPÉTITION 3 GÉOLOGIE : CORRECTION

I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne f , continûment dérivable sur $] - 1, 3[\times] - 2, 4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x, y) = f(2x - y, x + 2y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f .



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 2x - y < 3, -2 < x + 2y < 4\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.

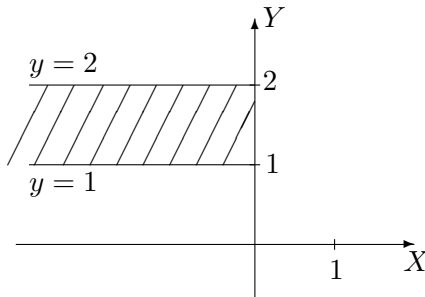
Les dérivées partielles sont $(D_x F)(x, y) = (D_u f)(2x - y, x + 2y) \cdot 2 + (D_v f)(2x - y, x + 2y) \cdot 1$

et

$(D_y F)(x, y) = (D_u f)(2x - y, x + 2y) \cdot (-1) + (D_v f)(2x - y, x + 2y) \cdot 2$

si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f .

- b) Même question pour g , continûment dérivable sur $] - 1, 1[\times] \ln \frac{\pi}{6}, +\infty[$ et $G(x, y) = g(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \in]1, 2[\} =] - \infty, 0[\times]1, 2[$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_x G)(x, y) = (D_u g)(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2))) \cdot 2 \exp(2x)$$

$$(D_y G)(x, y) = (D_v g)(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2))) \cdot \left(\frac{1}{\arcsin(y/2) \sqrt{4 - y^2}} \right)$$

si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g .

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[\times]0, +\infty[\times]0, 3[$.

a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g\left(\arcsin\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2 - 1\right)$.

b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g .

c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en $2/3$?

d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[\times]0, +\infty[\times]0, 3[$.

a) La fonction f n'est dérivable en aucun réel.

d) Le domaine de dérivabilité de f est $]1, 2[$; f n'est donc pas dérivable en $2/3$. La dérivée

de f en fonction des dérivées partielles de g est donnée par

$$Df(t) = (D_u g) \left(\arccos \left(\frac{t}{3} \right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2 - 1 \right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{9-t^2}} \right) \\ + (D_v g) \left(\arccos \left(\frac{t}{3} \right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2 - 1 \right) \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{(t-1)^3}} \right) + (D_w g) \left(\arccos \left(\frac{t}{3} \right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2 - 1 \right) \cdot 2t$$

si u , v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g .

3. **Soit** $F(t) = f(x(t), y(t))$ **avec** $x(2) = 3$, $y(2) = 5$, $(Dx)(2) = -1$, $(Dy)(2) = 4$, $(D_x f)(3, 5) = 6$ **et** $(D_y f)(3, 5) = -2$. **En supposant** F **dérivable en** 2 , **que vaut** $(DF)(2)$?

On a $(DF)(2) = (D_x f)(3, 5) \cdot (D_t x)(2) + (D_y f)(3, 5) \cdot (D_t y)(2) = -14$.

4. **Soit** $F(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$. **Sachant que** F **est dérivable en** $(0, 1)$ **et que**

$$u(0, 1) = -2 \quad (D_s u)(0, 1) = 2 \quad (D_t u)(0, 1) = 4$$

$$v(0, 1) = 5 \quad (D_s v)(0, 1) = 3 \quad (D_t v)(0, 1) = 6$$

et $(D_u f)(-2, 5) = -1$ **et** $(D_v f)(-2, 5) = 8$, **calculer** $(D_s F)(0, 1)$ **et** $(D_t F)(0, 1)$.

On a $(D_s F)(0, 1) = (D_u f)(-2, 5) \cdot (D_s u)(0, 1) + (D_v f)(-2, 5) \cdot (D_s v)(0, 1) = 22$ **et**
 $(D_t F)(0, 1) = (D_u f)(-2, 5) \cdot (D_t u)(0, 1) + (D_v f)(-2, 5) \cdot (D_t v)(0, 1) = 44$

5. **On donne la fonction** $(x, y) \mapsto f(x, y)$ **définie et 2 fois continûment dérivable sur** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. **On effectue le changement de variables en coordonnées polaires** $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ ($r > 0$ **et** $\theta \in [0, 2\pi[$) **et on considère** $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. **Montrer que**

$$(D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2} (D_\theta F)^2$$

Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et le second en (r, θ) .

II. Permutation de l'ordre d'intégration

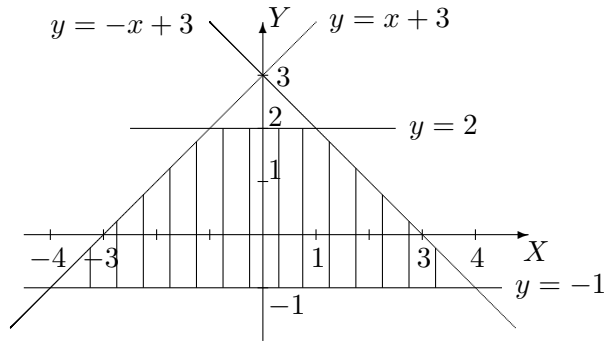
1. **Si la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^2 \left(\int_{y-3}^{3-y} f(x, y) dx \right) dy \qquad b) \int_0^2 \left(\int_y^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$$

a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-4}^{-1} \left(\int_{-1}^{x+3} f(x, y) dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^2 f(x, y) dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{-1}^{-x+3} f(x, y) dy \right) dx$$

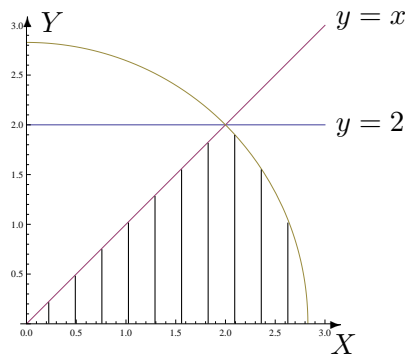
et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

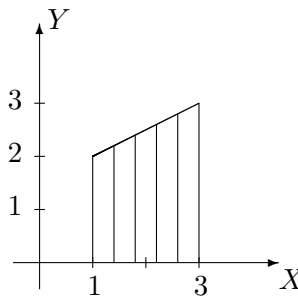
$$\int_0^2 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\int \int_A f(x, y) dx dy.$$

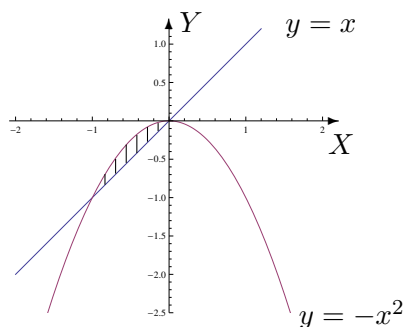


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^{\frac{x+3}{2}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_1^3 f(x, y) dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{2y-3}^3 f(x, y) dx \right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x - y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.
- a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
- b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = y \cos(x)$.



L'expression analytique de A est

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [x, -x^2]\}$$

ou encore

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0], x \in [-\sqrt{-y}, y]\}.$$

La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $7 \sin(1) - 11 \cos(1)$.

2. Si elle existe, calculer l'intégrale de

a) $f(x, y) = 4 - x^2$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2], y \in [x^2, 8 - x^2]\}$

b) $f(x, y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [-1, x]\}$

c) $f(x, y) = x + 2y$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4 - x^2}\}\}$

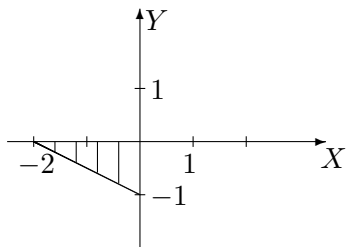
a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{1024}{15}$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{1}{2} \sin(1)$.

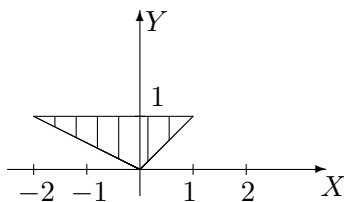
c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{16}{3} - 4\sqrt{2}$.

3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

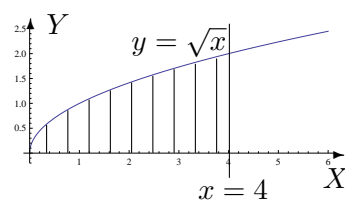
a) $\int \int_A e^{2x-y} dx dy$



b) $\int \int_A xy^2 dx dy$



c) $\int \int_A \frac{y}{\sqrt{4+x^2}} dx dy$



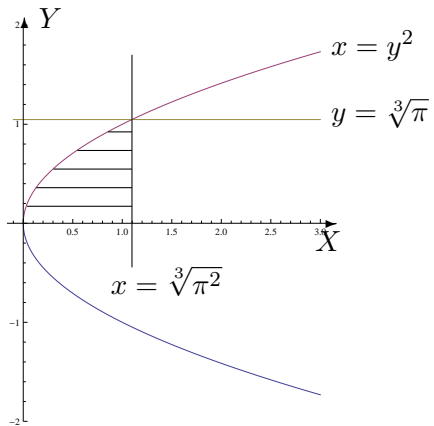
a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{4e^5 - 5e^4 + 1}{10e^4}$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $-\frac{3}{10}$.

c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sqrt{5} - 1$.

4. Soit $I = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3}) dx \right) dy$.

Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.



La fonction est intégrable sur cet ensemble (partie hachurée) et son intégrale vaut 0.