1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

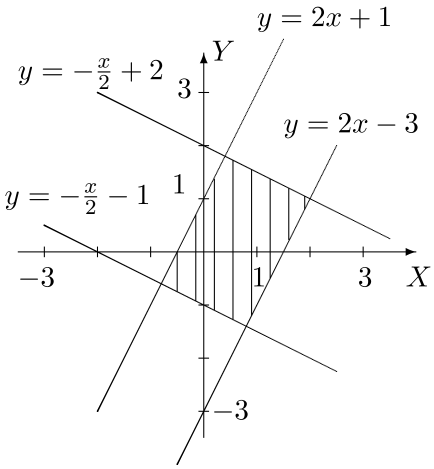
Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 3 Informatique : correction

Version 21 février 2013

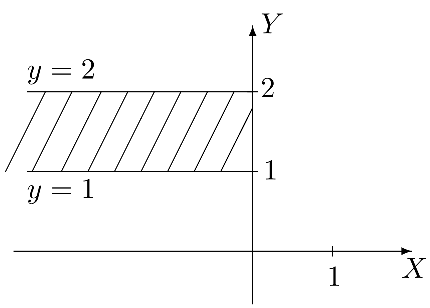
I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-1,3[\times]-2,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(2x-y, x+2y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 2x-y < 3,\ -2 < x+2y < 4\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.
Les dérivées partielles sont $(D_xF)(x,y) = (D_uf)(2x-y,x+2y).2 + (D_vf)(2x-y,x+2y).1$ et
$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(2x-y,x+2y).(-1) + (D_vf)(2x-y,x+2y).2$
si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]\ln\frac{\pi}{6},+\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(2x),\ \ln(\arcsin(y/2)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \in]1,2[\} =]-\infty,0[\times]1,2[$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y) = (D_ug)(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2))).2\ \exp(2x)$$

$$(D_yG)(x,y) = (D_vg)(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2))).\left(\frac{1}{\arcsin(y/2)\,\sqrt{4-y^2}}\right)$$

si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.**

   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g\left(\arcos\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en $2/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.

   a) La fonction f n'est dérivable en aucun réel.
   d) Le domaine de dérivabilité de f est $]1,2[$; f n'est donc pas dérivable en $2/3$. La dérivée

de f en fonction des dérivées partielles de g est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\arcos\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)\ .\ \left(\frac{-1}{\sqrt{9-t^2}}\right)$$

$$+(D_v g)\left(\arcos\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)\ .\ \left(\frac{-1}{2\sqrt{(t-1)^3}}\right)+(D_w g)\left(\arcos\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)\ .\ 2t$$

si $u,\ v$ et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

3. **Soit** $F(t) = f(x(t), y(t))$ **avec** $x(2) = 3,\ y(2) = 5,\ (Dx)(2) = -1,\ (Dy)(2) = 4,\ (D_x f)(3,5) = 6$ **et** $(D_y f)(3,5) = -2$**. En supposant** F **dérivable en** 2**, que vaut** $(DF)(2)$ **?**

   On a $(DF)(2) = (D_x f)(3,5).(D_t x)(2) + (D_y f)(3,5).(D_t y)(2) = -14$.

4. **Soit** $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$**. Sachant que** F **est dérivable en** $(0,1)$ **et que**

$$u(0,1) = -2 \quad (D_s u)(0,1) = 2 \quad (D_t u)(0,1) = 4$$

$$v(0,1) = 5 \quad (D_s v)(0,1) = 3 \quad (D_t v)(0,1) = 6$$

   et $(D_u f)(-2,5) = -1$ **et** $(D_v f)(-2,5) = 8$**, calculer** $(D_s F)(0,1)$ **et** $(D_t F)(0,1)$**.**

   On a $(D_s F)(0,1) = (D_u f)(-2,5).(D_s u)(0,1) + (D_v f)(-2,5).(D_s v)(0,1) = 22$ et $(D_t F)(0,1) = (D_u f)(-2,5).(D_t u)(0,1) + (D_v f)(-2,5).(D_t v)(0,1) = 44$

5. **On donne la fonction** $(x,y) \mapsto f(x,y)$ **définie et 2 fois continûment dérivable sur** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires** $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ $(r > 0$ **et** $\theta \in [0, 2\pi[)$ **et on considère** $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$**. Montrer que**

$$(D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$$

   Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

II. Permutation de l'ordre d'intégration

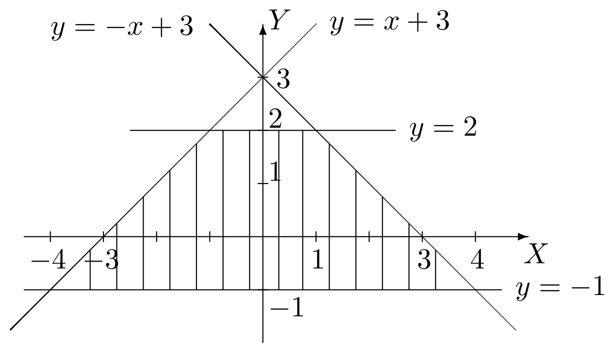
1. **Si la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{2}\left(\int_{y-3}^{3-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{2}\left(\int_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

   a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-4}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+3} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{2} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{1}^{4}\left(\int_{-1}^{-x+3} f(x,y)\ dy\right) dx$$

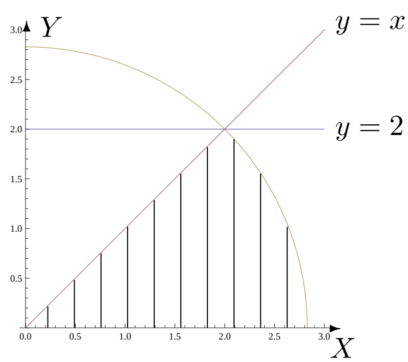
   et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

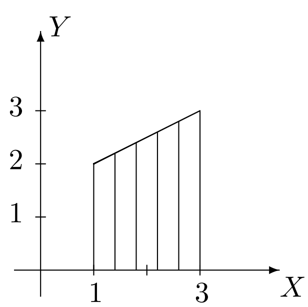
$$\int_0^2 \left(\int_0^x \ f(x,y)\ dy \right) dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{8-x^2}} \ f(x,y)\ dy \right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\int\int_A \ f(x,y)dx\,dy.$$

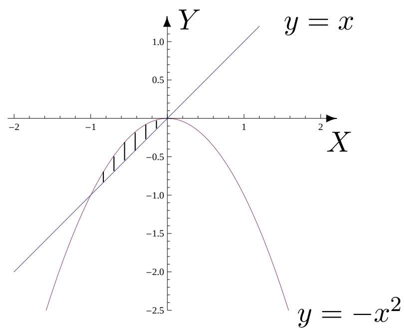


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^{\frac{x+3}{2}} \ f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_1^3 \ f(x,y)\ dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{2y-3}^3 \ f(x,y)\ dx \right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x - y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = y \cos(x)$.



L'expression analytique de A est
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [x, -x^2]\}$
ou encore
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in [-\sqrt{-y}, y]\}$.
La fonction f est intgrable sur A et son intégrale vaut $7\sin(1) - 11\cos(1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
a) $f(x, y) = 4 - x^2$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2],\ y \in [x^2, 8 - x^2]\}$
b) $f(x, y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-1, x]\}$
c) $f(x, y) = x + 2y$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4 - x^2}\}\}$

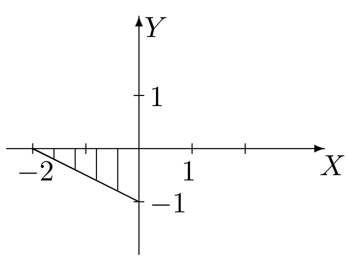
a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1024}{15}$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin(1)$.

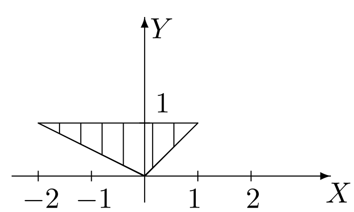
c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{16}{3} - 4\sqrt{2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

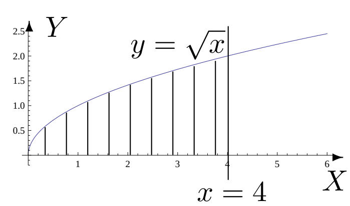
a) $\int\int_A e^{2x-y}\, dx\, dy$



b) $\int\int_A xy^2\, dx\, dy$



c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx\, dy$

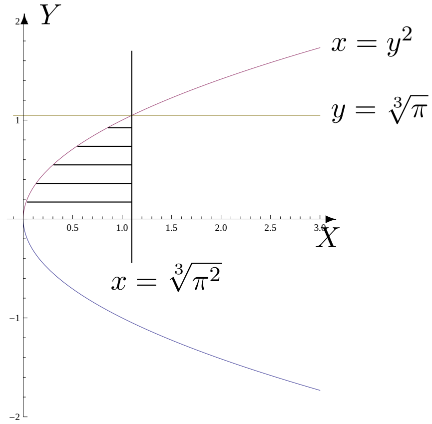


a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{4\,e^5 - 5\,e^4 + 1}{10\,e^4}$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $-\dfrac{3}{10}$.

c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sqrt{5} - 1$.

4. **Soit** $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx \right) \ dy$**.**
Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.



La fonction est intégrable sur cet ensemble (partie hachurée) et son intégrale vaut 0.