1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Répétition 4 : correction

Version 19 octobre 2012(V1 : 29/08/09)

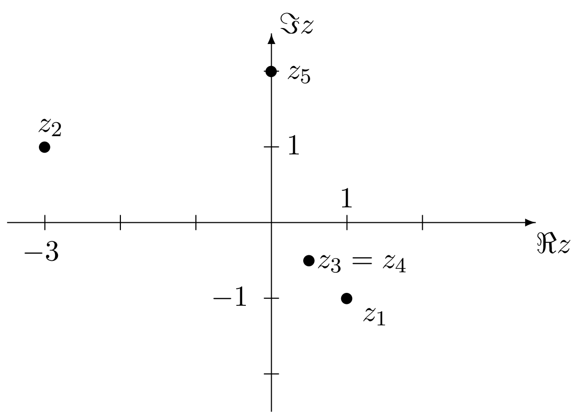
I. Exercices de base sur les nombres complexes

1. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$-i+1, \quad (i+1)(-1+2i), \quad \frac{1}{i+1}, \quad \frac{i^7}{-i+1}, \quad (1+i)^2$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = -i+1$	1	-1	$1+i$	$\sqrt{2}$
$z_2 = (i+1)(-1+2i)$	-3	1	$-3-i$	$\sqrt{10}$
$z_3 = \frac{1}{i+1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1+i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_4 = \frac{i^7}{-i+1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1+i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_5 = (1+i)^2$	0	2	$-2i$	2



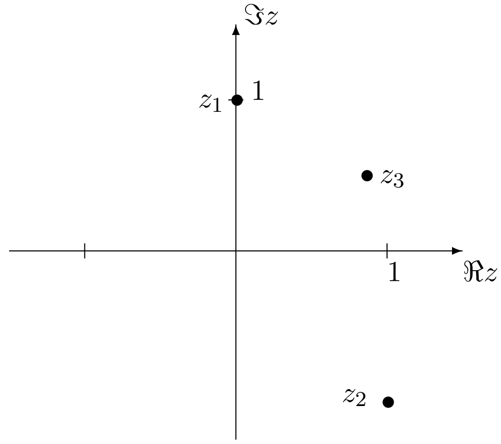
2. **Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$i, \quad -i+1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i).$$

On a

$$z_1 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad z_2 = -i+1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

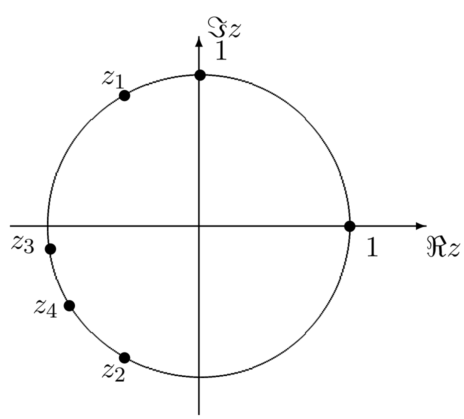


3. **On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫) en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$**

$$\cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}, \quad (\cos 1 - i\sin 1)(\cos\alpha - i\sin\alpha), \quad \sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha).$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha - i\sin\alpha$	1
$z_2 = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha + i\sin\alpha$	1
$z_3 = (\cos 1 - i\sin 1)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$	$\cos(1+\alpha)$	$-\sin(1+\alpha)$	$\cos(1+\alpha) + i\sin(1+\alpha)$	1
$z_4 = \sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha)$	1



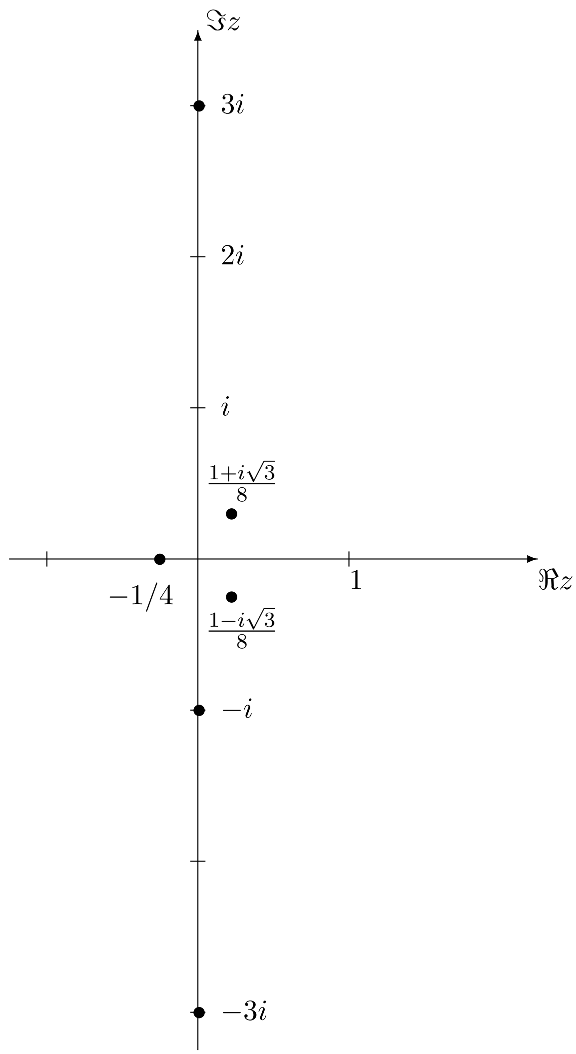
4. **Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$z^2 + 9 = 0, \quad 64z^3 + 1 = 0, \quad z^2 + 3 = 2iz$$

L'ensemble des solutions de la première équation est $S = \{-3i, 3i\}$.
L'ensemble des solutions de la deuxième équation est

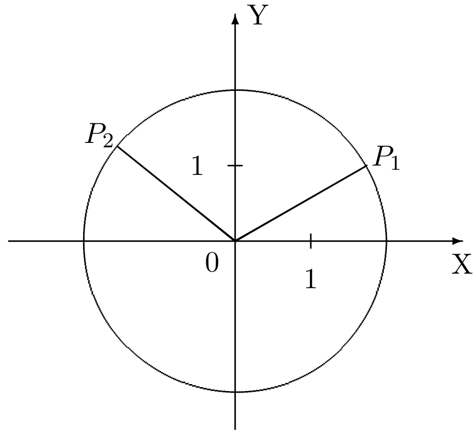
$$S = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{8}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$$

L'ensemble des solutions de la troisième équation est $S = \{-i, 3i\}$.



II. Divers

1. **Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1, telles que $0 < y_1 < x_1$. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ de $120°$ dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine O. En fonction des coordonnées de P_1, déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité P_2 du vecteur obtenu après rotation.**
   a) Représenter graphiquement la situation.



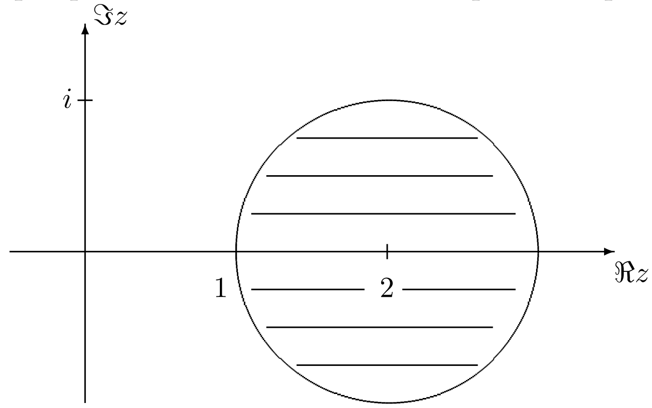
b) En faisant appel à la trigonométrie, écrire les coordonnées de P_1 sous une autre forme.
Si la distance de P_1 à O vaut R, réel strictement positif, alors P_1 a pour coordonnées $(R\cos(\theta),\ R\sin(\theta))$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$.

c) En déduire les coordonnées de P_2.
Les coordonnées de P_2 sont alors $(R\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}),\ R\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}))$.

d) Donner les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1.
Les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1 sont $\frac{1}{2}(-x_1 - \sqrt{3}\ y_1, \sqrt{3}\ x_1 - y_1)$.

e) Interpréter cet exercice en utilisant les nombres complexes.
Le point P_1 de coordonnées cartésiennes $(R\cos(\theta), R\sin(\theta))$ avec $R > 0$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$ est le point-image du complexe $z_1 = R(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Le point P_2 de coordonnées cartésiennes $(R\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}), R\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}))$ est le point-image du complexe $z_2 = R(\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}))$.
Si on multiplie z_1 par $z = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$, on obtient z_2. Ainsi, la rotation de 120° dans le sens trigonométrique correspond à une multiplication du complexe z_1 par le complexe z.

2. **Représenter graphiquement l'ensemble des complexes z qui vérifient $|z-2| \leq 1$.**



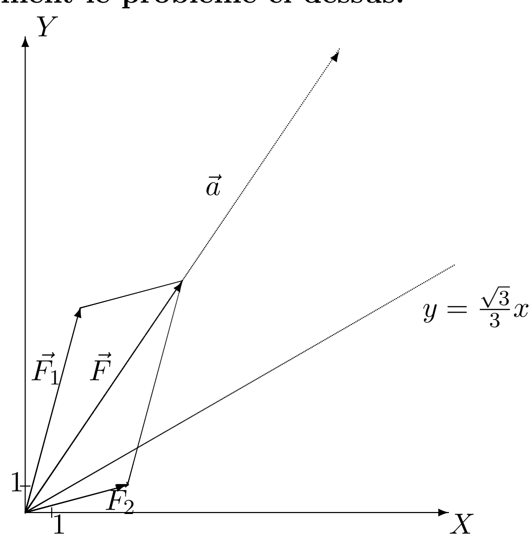
Les points du cercle (le « bord ») sont compris dans l'ensemble.

3. **On donne l'ensemble A suivant du plan. Décrire cet ensemble à l'aide des coordonnées polaires.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0, y \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4, \Re z \leq 0, \Im z \leq 0\}.$$

On a
$$A = \left\{(r, \theta) : r \in]0, 4],\ \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

4. **Un palet de hockey de 0,5 kg glisse (la friction est négligeable) sur une patinoire (horizontale) suite à l'action de 2 forces horizontales. La première, d'une intensité de 8 N, fait un angle de $45°$ avec la direction d'une droite qui, dans un repère orthonormé, a pour équation cartésienne $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. La seconde a une intensité de 4 N et fait un angle de $-15°$ avec cette même direction.**
Déterminer la valeur de l'accélération du palet ($\vec{F} = m\vec{a}$) ainsi que sa projection orthogonale sur une droite dont la direction est orthogonale à celle de la droite donnée.
a) Représenter graphiquement le problème ci-dessus.



b) Quelle est la mesure de l'angle formé par la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ avec l'axe des abscisses ?
La droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ fait un angle de 30° avec l'axe des abscisses.

c) Quel est l'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ avec l'axe des abscisses ? Même question pour $\overrightarrow{F_2}$.
L'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ avec l'axe des abscisses vaut 75° ; celui formé par $\overrightarrow{F_2}$ vaut 15°.

d) Donner les composantes de $\overrightarrow{F_1}$ et de $\overrightarrow{F_2}$ dans la base correspondant au repère orthonormé en simplifiant au maximum leur expression.
Dans la base correspondant au repère orthonormé, les composantes de $\overrightarrow{F_1}$ sont $(2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1), 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$ et celles de $\overrightarrow{F_2}$ sont $(\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1), \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1))$.

e) Déterminer la résultante de ces 2 forces ainsi que ses composantes.
La résultante de ces 2 forces a pour composantes $(\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1), \sqrt{2}(3\sqrt{3} + 1))$.

f) Quelles sont les composantes de l'accélération $\vec{a}$?
Les composantes de l'accélération sont $(2\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1), 2\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1))$.

g) Donner les composantes d'un vecteur directeur de toute droite orthogonale à la droite donnée.
Les composantes d'un vecteur directeur de toute droite orthogonale à la droite donnée sont $(1, -\sqrt{3})$ (ou tout multiple non nul).

h) Quelle est l'expression vectorielle de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite vectorielle ?
L'expression vectorielle de la projection orthogonale $\vec{u'}$ d'un vecteur $\vec{u}$ sur une droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul $\vec{v}$ est donnée par

$$\vec{u'} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}.$$

i) Déterminer la projection orthogonale demandée de $\vec{a}$.
La projection orthogonale demandée a pour composantes $(\sqrt{2}(\sqrt{3}-5), \sqrt{2}(5\sqrt{3}-3))$.