
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (PARTIM B)

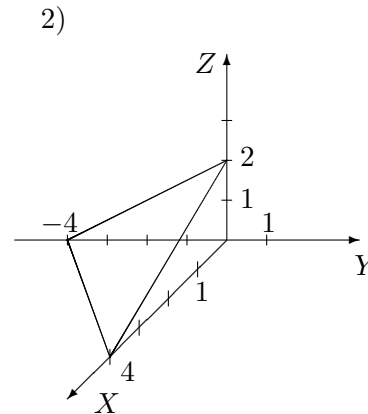
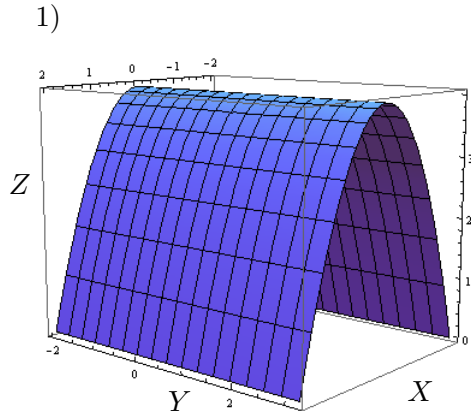
RÉPÉTITION 4 BIOLOGIE : CORRECTION

I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. Corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2$ et les plans d'équation $z = 0$, $y = -2$ et $y = 3$.
2. Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation $x - y + 2z = 4$

Le volume du premier corps vaut $160/3$ (unités de volume) et celui du deuxième vaut $16/3$.
Les représentations graphiques sont les suivantes :

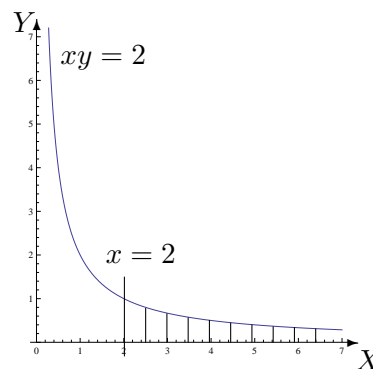


II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.

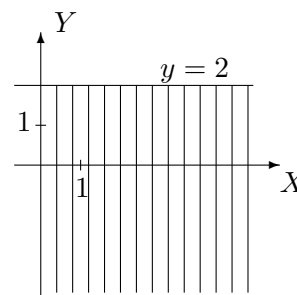
a) $\int \int_A \frac{1}{x^2} dx dy$ avec $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $1/4$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



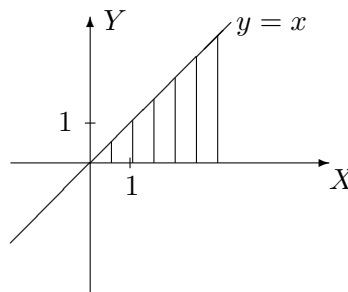
$$b) \int_{-\infty}^2 \left(\int_0^{+\infty} e^{2y-x} dx \right) dy$$

La fonction est intégrable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[, y \in]-\infty, 2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{e^4}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



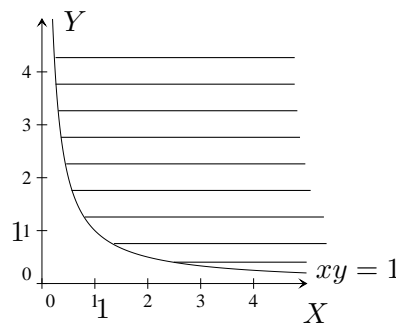
$$c) \iint_A e^{-x^2} dx dy \quad \text{avec} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



$$d) \iint_A y^3 e^{-xy^2} dx dy \quad \text{avec} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 1 \leq xy\}$$

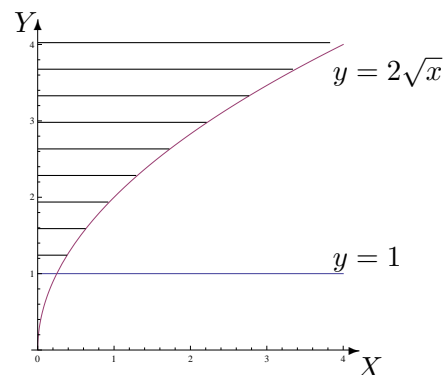
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



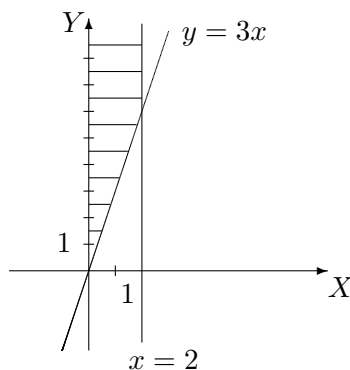
2. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{y^2/4} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2} dx \right) dy, \quad b) \int_0^2 \left(\int_{3x}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2} dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left(\int_0^{4x^2} \frac{1}{x+y} dy \right) dx$$

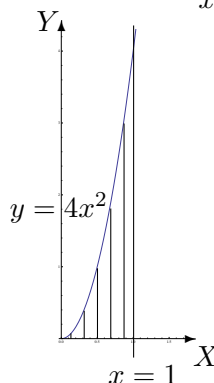
a) La fonction est intégrable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[, x \in [0, y^2/4]\}$ et son intégrale vaut $\frac{1}{2e} \ln(5/4)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 2], y \in [3x, +\infty[\}$ et son intégrale vaut $2\sqrt{2} \operatorname{arctg}(3)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1], y \in [0, 4x^2] \}$ et son intégrale vaut $\frac{5}{4} \ln(5) - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



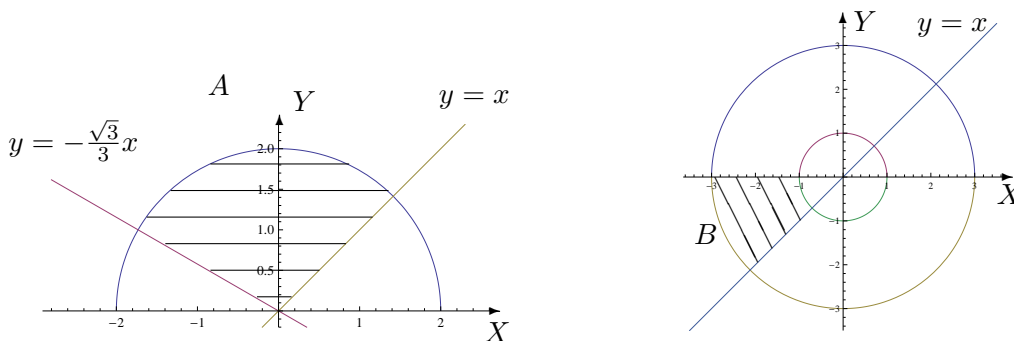
III. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer

a) $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

b) $\iint_B xy dx dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

c) $\iint_C (x + 3y) dx dy$ où $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4 - x^2}\}\}$.



Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\frac{14\pi}{9}$, 5 et $\frac{8}{3}(3 - 2\sqrt{2})$.

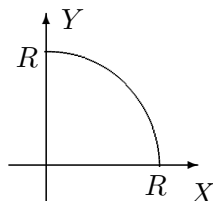
2. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = s^{-1} \iint_A x dx dy, \quad y_A = s^{-1} \iint_A y dx dy$$

et où s est l'aire de la surface A .

Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

Le volume du corps est 8π (unités de volume).