

---

Université  
de Liège



# *1, 2, 3... Sciences*

*Année académique 2012-2013*

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (PARTIM B)

RÉPÉTITION 4 CHIMIE, GÉOGRAPHIE, PHYSIQUE : CORRECTION

---

## I. Volume d'un corps

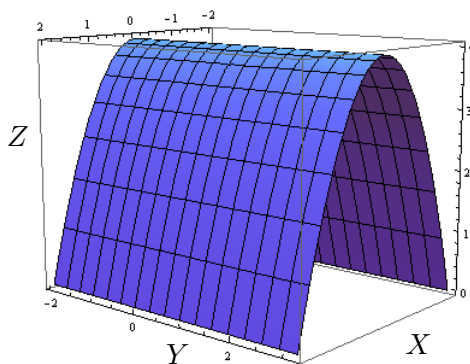
Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. Corps borné par la surface d'équation cartésienne  $z = 4 - x^2$  et les plans d'équation  $z = 0$ ,  $y = -2$  et  $y = 3$ .
2. Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation  $x - y + 2z = 4$
3. (\*)<sup>1</sup> Corps borné par la surface d'équation cartésienne  $z = 1 - x^2 - 4y^2$  et le plan d'équation  $z = 0$ .

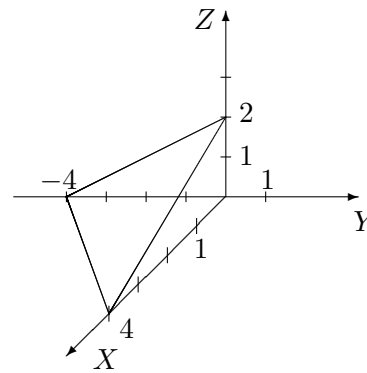
Le volume du premier corps vaut  $160/3$  (unités de volume), celui du deuxième vaut  $16/3$  et celui du troisième vaut  $\frac{\pi}{4}$ .

Les représentations graphiques sont les suivantes :

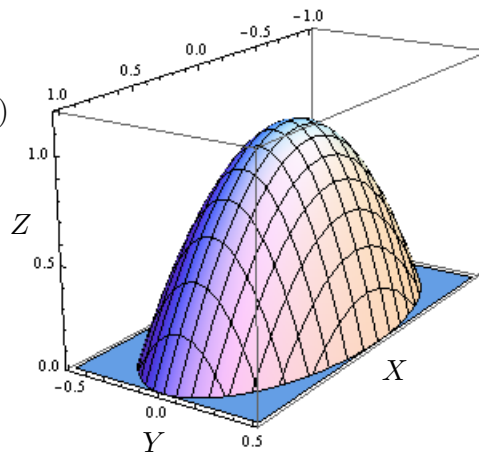
1)



2)



3)



## II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

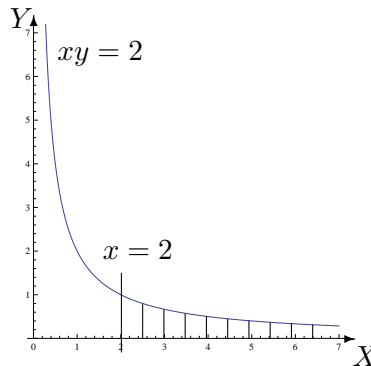
1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.

---

1. Pour les physiciens ... et ceux qui veulent !

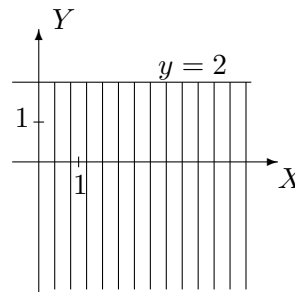
a)  $\int \int_A \frac{1}{x^2} dx dy$  avec  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\}$

La fonction est intégrable sur  $A$  et son intégrale vaut  $1/4$ . L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



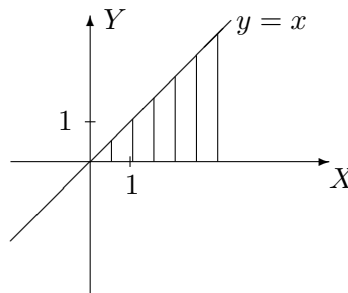
b)  $\int_{-\infty}^2 \left( \int_0^{+\infty} e^{2y-x} dx \right) dy$

La fonction est intégrable sur  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[, y \in ]-\infty, 2]\}$  et son intégrale vaut  $\frac{e^4}{2}$ . L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



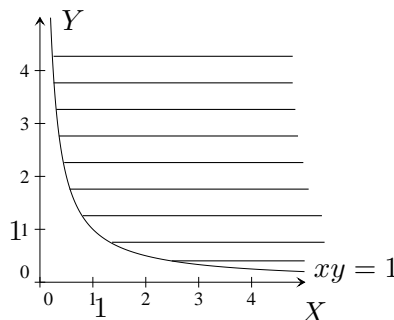
c)  $\int \int_A e^{-x^2} dx dy$  avec  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

La fonction est intégrable sur  $A$  et son intégrale vaut  $\frac{1}{2}$ . L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d)  $\int \int_A y^3 e^{-xy^2} dx dy$  avec  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 1 \leq xy\}$

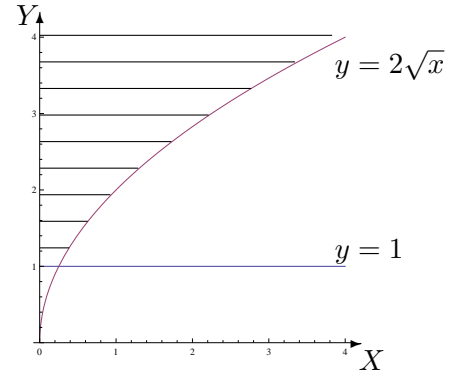
La fonction est intégrable sur  $A$  et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



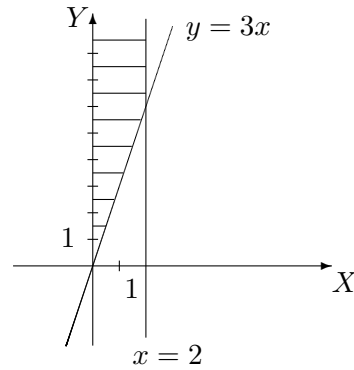
2. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_1^{+\infty} \left( \int_0^{y^2/4} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2} dx \right) dy, \quad b) \int_0^2 \left( \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2} dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left( \int_0^{4x^2} \frac{1}{x+y} dy \right) dx$$

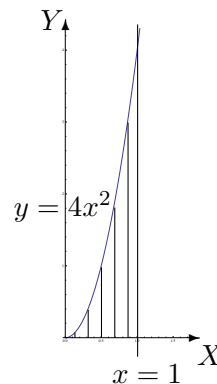
a) La fonction est intégrable sur  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[, x \in [0, y^2/4]\}$  et son intégrale vaut  $\frac{1}{2e} \ln(5/4)$ . L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



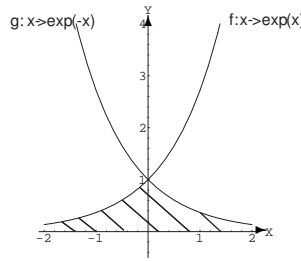
b) La fonction est intégrable sur  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in ]0, 2], y \in [3x, +\infty[ \}$  et son intégrale vaut  $2\sqrt{2} \operatorname{arctg}(3)$ . L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in ]0, 1], y \in [0, 4x^2] \}$  et son intégrale vaut  $\frac{5}{4} \ln(5) - 1$ . L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. Calculer l'intégrale de  $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x - y$  sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



Une description analytique de l'ensemble d'intégration est donnée par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in ]-\infty, 0], y \in [0, e^x]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[, y \in [0, e^{-x}]\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in ]0, 1], x \in [\ln(y), -\ln(y)]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

et l'intégrale vaut  $-\frac{1}{2}$ .

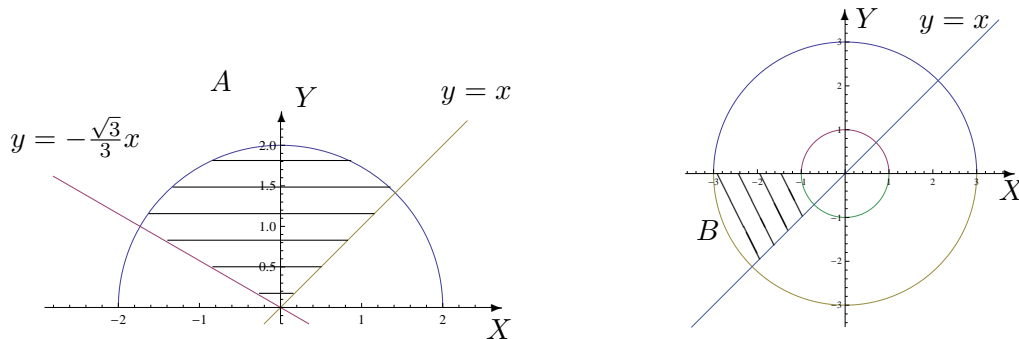
### III. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer

a)  $\int \int_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  où  $A$  est l'ensemble hachuré ci-dessous.

b)  $\int \int_B xy dx dy$  où  $B$  est l'ensemble hachuré ci-dessous.

c)  $\int \int_C (x + 3y) dx dy$  où  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4 - x^2}\}\}$ .



Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement  $\frac{14\pi}{9}$ , 5 et  $\frac{8}{3}(3 - 2\sqrt{2})$ .

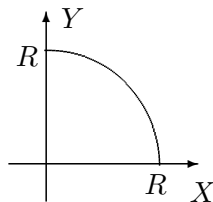
2. Soit  $A$  une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de  $A$  (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées  $(x_A, y_A)$  où

$$x_A = s^{-1} \int \int_A x dx dy, \quad y_A = s^{-1} \int \int_A y dx dy$$

et où  $s$  est l'aire de la surface  $A$ .

Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de cercle de rayon  $R$  ( $R$  réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées  $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$  dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne  $z = 4 - x^2 - y^2$  et par le plan d'équation  $z = 0$ .

Le volume du corps est  $8\pi$  (unités de volume).

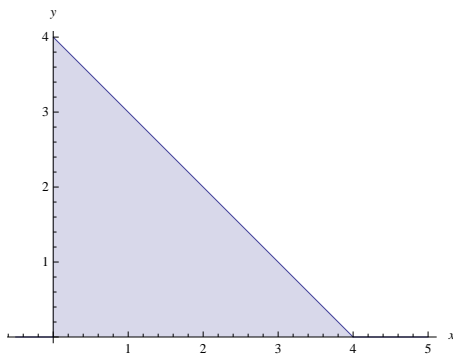
#### IV. Divers

La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \int \int_R \delta(x, y) dx dy,$$

où  $\delta(x, y)$  est la densité au point de coordonnées  $(x, y)$ . Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle  $R$  dont les côtés égaux mesurent  $4\text{ m}$ . Si la densité en un point  $P$  est directement proportionnelle au carré de la distance de  $P$  au sommet opposé à l'hypoténuse<sup>2</sup>, si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes  $OX$  et  $OY$  sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle  $R$ ,

- quelle est la masse de cette plaque ?
- en quelles unités s'exprime la constante  $K$  ?



La masse de la plaque est  $\frac{128K}{3}\text{ kg}$  et la constante  $K$  s'exprime en  $\text{kg/m}^4$ .

2. c'est-à-dire  $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$  (où  $K$  est une constante)