1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 4 Géologie : correction

Version 28 février 2013

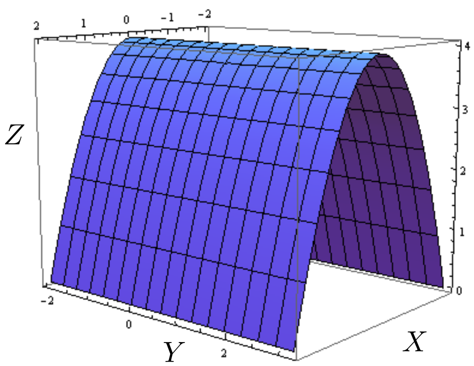
I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

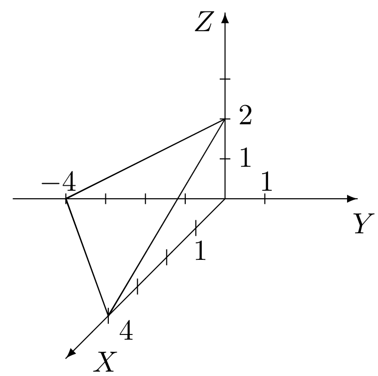
1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 4 - x^2$ **et les plans d'équation** $z = 0,\ y = -2$ **et** $y = 3$**.**
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation** $x - y + 2z = 4$

   Le volume du premier corps vaut 160/3 (unités de volume)et celui du deuxième vaut 16/3. Les représentations graphiques sont les suivantes :

1)



2)

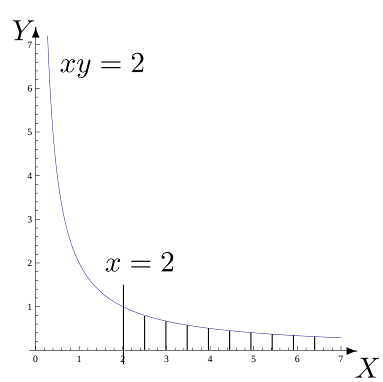


II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

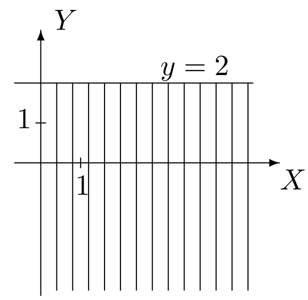
   a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1/4. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



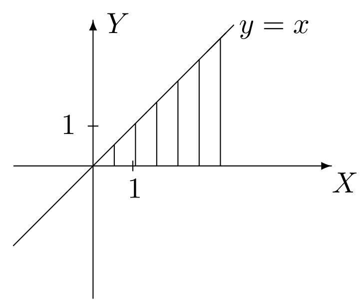
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{2y-x}\,dx\right)dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,+\infty[,\ y\in]-\infty,2]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{e^4}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



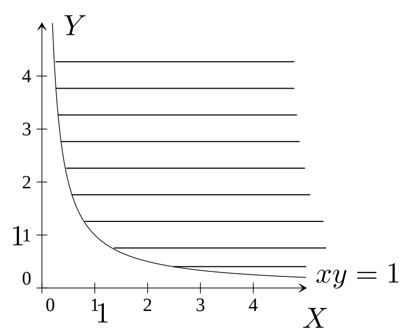
c) $\displaystyle\int\int_A e^{-x^2}\,dx\,dy$ avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\int\int_A y^3\,e^{-xy^2}\,dx\,dy$ avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ 1\le xy\}$

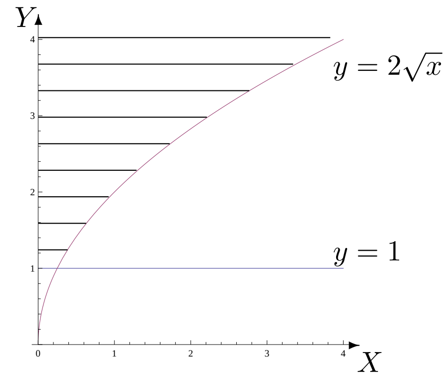
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



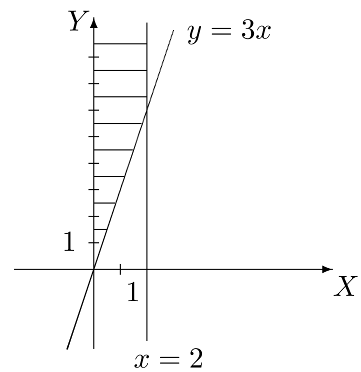
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$a)\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\left(\int_{0}^{y^2/4}\frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx\right)dy,\quad b)\int_{0}^{2}\left(\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy\right)dx,\quad c)\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{4x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$

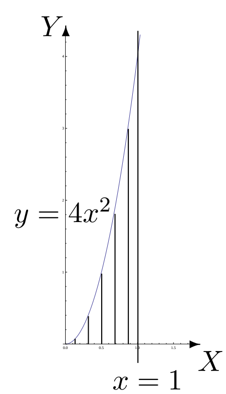
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,+\infty[,\ x \in [0, y^2/4]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2e}\ln(5/4)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,2],\ y \in [3x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $2\sqrt{2}\,\mathrm{arcotg}(3)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0, 4x^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{5}{4}\ln(5) - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



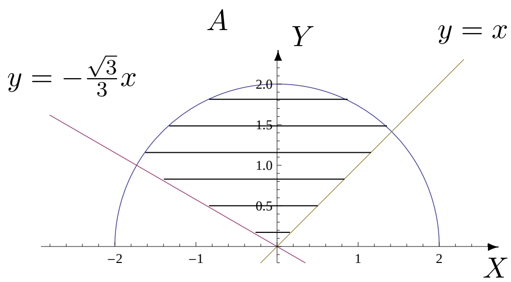
III. Intégration par changement de variables polaires

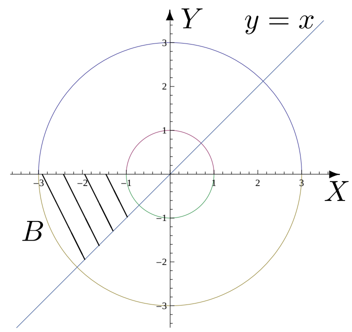
1. **Si elle existe, calculer**

a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

b) $\displaystyle\int\int_B xy\ dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

c) $\displaystyle\int\int_C (x+3y)\ dx\,dy \quad$ où $\quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4-x^2}\}\}.$





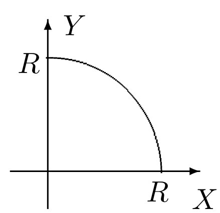
Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\dfrac{14\pi}{9}$, 5 et $\dfrac{8}{3}(3-2\sqrt{2})$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1}\int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1}\int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\dfrac{4R}{3\pi}, \dfrac{4R}{3\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

Le volume du corps est 8π (unités de volume).

IV. Divers

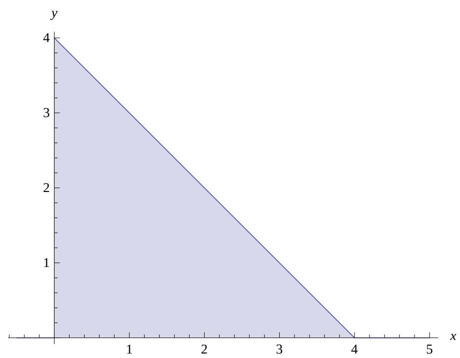
La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \int\int_R \delta(x,y) dx dy,$$

où $\delta(x, y)$ est la densité au point de coordonnées (x, y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent $4\ m$. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse[1], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) **quelle est la masse de cette plaque ?**

b) **en quelles unités s'exprime la constante K ?**



La masse de la plaque est $\frac{128K}{3}\ kg$ et la constante K s'exprime en kg/m^4.

1. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)