# *1, 2, 3...Sciences*

***Année académique 2012-2013***

## Exercices de mathématiques
## Répétition 5 : correction

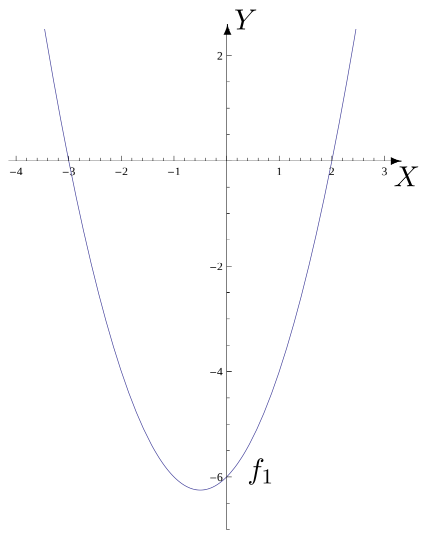
Version 7 septembre 2012(V1 : 29/08/09)

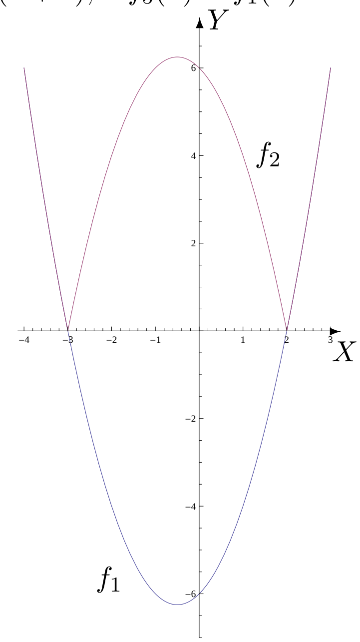
**Exercices sur les éléments de base relatifs aux fonctions**

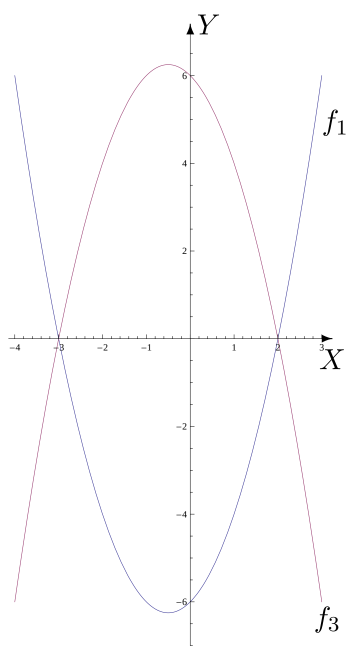
1. **Représenter graphiquement les fonctions données explicitement ci-dessous, toutes définies sur $\mathbb{R}$**

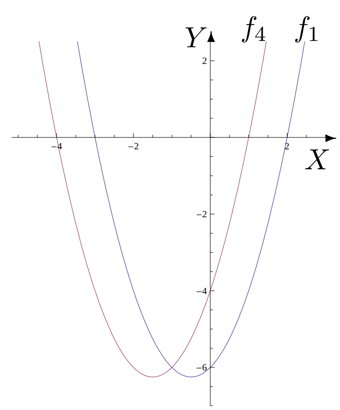
$$f_1(x) = x^2 + x - 6, \quad f_2(x) = |f_1(x)|$$

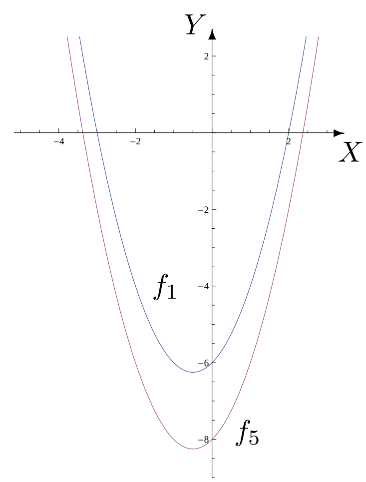
$$f_3(x) = -f_1(x), \quad f_4(x) = f_1(x+1), \quad f_5(x) = f_1(x) - 2.$$



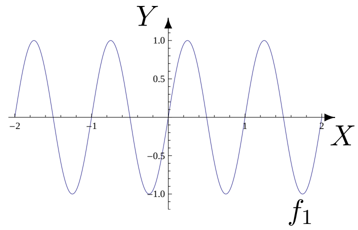



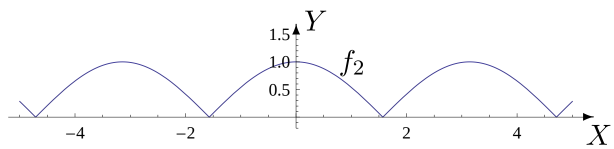



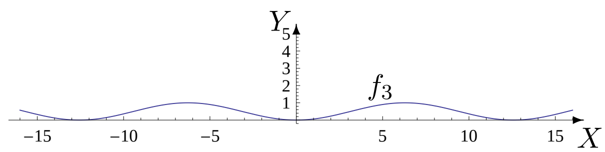

2. **Déterminer les domaines de définition, la parité, la périodicité et le graphique des fonctions données explicitement ci-dessous**

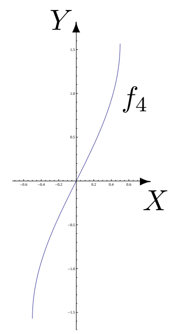
$f_1(x) = \sin(2\pi x)$, $f_2(x) = |\cos x|$, $f_3(x) = \sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right)$, $f_4(x) = \arcsin(2x)$, $f_5(x) = \arcsin(\sin(2x))$.

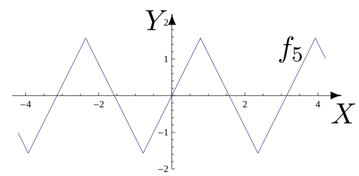
| Fonction | dom($f$) | Parité | Période |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | $\mathbb{R}$ | impair | 1 |
| $f_2$ | $\mathbb{R}$ | pair | $\pi$ |
| $f_3$ | $\mathbb{R}$ | pair | $4\pi$ |
| $f_4$ | $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ | impair | non périodique |
| $f_5$ | $\mathbb{R}$ | impair | $\pi$ |









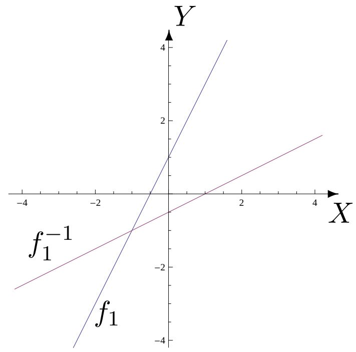


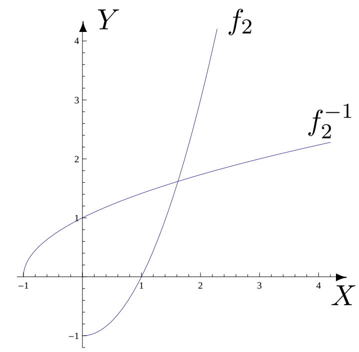

3. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image ($x$ est une variable réelle). Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe. Représenter alors $f$ et son inverse dans le même repère orthonormé.**

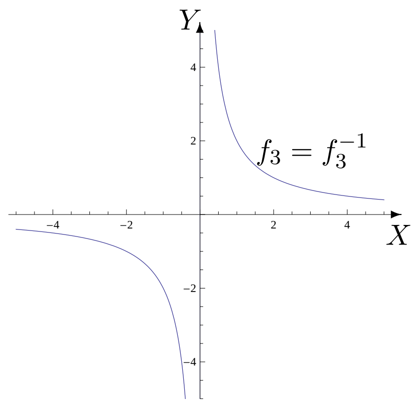
$$f_1(x) = 2x + 1, \quad f_2(x) = x^2 - 1, \quad f_3(x) = \frac{2}{x}, \quad f_4(x) = |x - 1|.$$

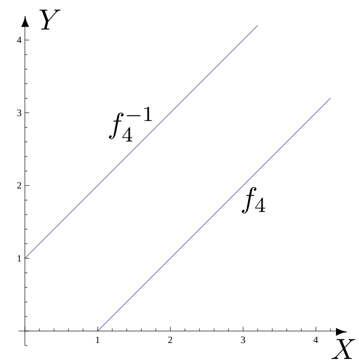
| Fonction | dom($f$) | im($f$) | Fonction inverse |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f_1^{-1} : x \mapsto \frac{x-1}{2}$ |
| $f_2$ | $\mathbb{R}$ | $[-1, +\infty[$ | pas d'inverse (cf. ci-dessous) |
| $f_3$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0$ | $f_3^{-1} : x \mapsto \frac{2}{x}$ |
| $f_4$ | $\mathbb{R}$ | $[0, +\infty[$ | pas d'inverse (cf. ci-dessous) |

Si on restreint le domaine de définition de $f_2$ à l'ensemble $[0, +\infty[$ par exemple alors la fonction admet une fonction inverse donnée par $f_2^{-1} : \; [-1, +\infty[ \to [0, +\infty[ \; x \mapsto \sqrt{x+1}$.
Si on restreint le domaine de définition de $f_4$ à l'ensemble $[1, +\infty[$ par exemple alors la fonction admet une fonction inverse donnée par $f_4^{-1} : \; [0, +\infty[ \to [1, +\infty[ \; x \mapsto x + 1$.




4. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous. Dans les cas $(b)$, $(c)$, $(g)$ et $(h)$, mentionner de quelles fonctions élémentaires chacune de ces fonctions est la composée**

$$(a)\ \frac{1}{1-|x+1|},\quad (b)\ \ln(x^2+x-6),\quad (c)\ \sqrt{\frac{x+1}{x+2}},\quad (d)\ \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}},\quad (e)\ \ln(e^x-e)$$

$$(f)\ \ln\left(x-\sqrt{1+x^2}\right),\quad (g)\ \arccos(x^2-1),\quad (h)\ \mathrm{arctg}(\ln x)$$

| Fonction | $\mathrm{dom}(f)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{1-\lvert x+1\rvert}$ | $\mathbb{R}\setminus\{-2,\ 0\}$ |
| $\ln(x^2+x-6)$ | $]-\infty,-3[\,\cup\,]2,+\infty[$ |
| $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ | $]-\infty,-2[\cup\,[-1,+\infty[$ |
| $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ | $[-1,+\infty[$ |
| $\ln(e^x-e)$ | $]1,+\infty[$ |
| $\ln\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$ | $\emptyset$ |
| $\arccos(x^2-1)$ | $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ |
| $\mathrm{arctg}(\ln x)$ | $]0,+\infty[$ |

Si la fonction donnée est égale à $f \circ g$ alors on a

- pour $x \mapsto \ln(x^2 + x - 6)$ : les fonctions $g : x \mapsto x^2 + x - 6$ et $f : y \mapsto \ln(y)$
- pour $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ : les fonctions $g : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ et $f : y \mapsto \sqrt{y}$
- pour $x \mapsto \arccos(x^2 - 1)$ : les fonctions $g : x \mapsto x^2 - 1$ et $f : y \mapsto \arccos(y)$
- pour $x \mapsto \mathrm{arctg}(\ln x)$ : les fonctions $g : x \mapsto \ln x$ et $f : y \mapsto \mathrm{arctg}(y)$

5. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de $\ln$ et de l'exponentielle).**

$$\ln(x) - 1, \quad \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |-\ln(-x)|, \quad -\exp(x) + 1, \quad \exp(x-1), \quad (\exp x) - 2.$$

Le domaine de définition de la première fonction est $]0, +\infty[$ ; celui de la deuxième est $\mathbb{R}_0$ et celui de la troisième est $]-\infty, 0[$.
Le domaine de définition des 3 fonctions exponentielles est $\mathbb{R}$.