1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 5 Chimie, Géographie, Physique : correction

Version 22 février 2013

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 1-i & 1 \\ \frac{2}{i} & (2+i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i-1} \\ 2i & \frac{i}{3} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

1) $A+B$, 2) $A+\widetilde{B}$, 3) $A.B$, 4) $A.B+C$, 5) $B.A$, 6) $C.\widetilde{A}$, 7) $A^*.C$, 8) $i.C$, 9) $(i.A)^*$.

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5-i & -3i \\ -i & 2 & 5+4i \end{pmatrix}$

3) $A.B = \begin{pmatrix} -4-4i & 1-5i \\ 8-i & 7+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} -1-4i & \frac{1-11i}{2} \\ 8+i & \frac{21+25i}{3} \end{pmatrix}$

5) $B.A = \begin{pmatrix} -6 & -2+2i & 4i \\ 12-i & 5-4i & 3-4i \\ -5i & 1-i & 4+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 7 & \frac{-11-9i}{6} \\ 3+5i & \frac{-2i}{3} \\ 8+12i & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1-i}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -3i & 1 \\ 1-i & -i \\ 2 & -4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 2, \forall i,j$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$**. Montrer que** $A^2 - 5A + 6I = 0$**.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec**

$$\textbf{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \ (a, b \in \mathbb{C})$$

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a \end{pmatrix}$ $(a, c \in \mathbb{C})$.

La forme générale des matrices qui commutent avec B est du type $\begin{pmatrix} \alpha & a\beta \\ b\beta & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ si a et b sont non nuls.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on a $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$; si $a \neq 0$ et $b = 0$, on a $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.
Enfin, si on a $a = b = 0$ alors toute matrice commute avec la matrice nulle.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+i & -2i \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ (i-1)^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin^2 a & \cos^2 a \\ \cos(2b) & \sin^2 b & \cos^2 b \\ \cos(2c) & \sin^2 c & \cos^2 c \end{pmatrix} \ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Le déterminant de A vaut $\frac{3}{2}(2+i)$, celui de B vaut -10, celui de C vaut 40, celui de D vaut -16 et celui de E vaut 0.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en** $x \in \mathbb{C}$**. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} i & x-2 \\ x & 5i \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} x & 9 \\ -1 & x \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 6 \\ 0 & x-1 & x \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est égal à $(-x+1+2i)(x-1+2i)$; celui de B est égal à $(x+3i)(x-3i)$, celui de C vaut $(x-1)^2(x+4)$ et celui de D vaut $x^2(x-1)^2$.

$\boxed{\textbf{III. Inversion de matrices}}$

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice inverse de A est $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice inverse de C est égale à la transposée de C .
- La matrice inverse de D est $D^{-1} = \frac{-2-i}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice inverse de E est $E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & -1 \\ -i & -1 & -1 \end{pmatrix}$