1, 2, 3...Sciences

Année académique 2012-2013

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉPÉTITION 6 : CORRECTION

Version 7 septembre 2012(V1 : 29/08/09)

I. Décomposition en fractions simples

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

$$(1)\ \frac{1}{x^2+6x+9},\qquad (2)\ \frac{x}{x^2+x-6},\qquad (3)\ \frac{x^2+9}{x(x^2+6x+9)}$$

$$(4)\ \frac{3x^2+1}{x-1},\qquad (5)\ \frac{x^2-3}{x^2+1},\qquad (6)\ \frac{x^3}{x^3-1}$$

On a les décompositions suivantes :

$$(1)\ \frac{1}{x^2+6x+9} = \frac{1}{(x+3)^2},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\} \quad (2)\ \frac{x}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}\right),\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,\ 2\}$$

$$(3)\ \frac{x^2+9}{x(x^2+6x+9)} = \frac{1}{x} - \frac{6}{(x+3)^2},\ x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-3\}$$

$$(4)\ \frac{3x^2+1}{x-1} = 3(x+1) + \frac{4}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad (5)\ \frac{x^2-3}{x^2+1} = 1 - \frac{4}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{R}$$

$$(6)\ \frac{x^3}{x^3-1} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right),\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

II. Manipulation des fonctions élémentaires

1. **Simplifier les expressions suivantes au maximum**

$$(1)\ \ln\left(\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)^2\right) + \ln\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad (2)\ \mathrm{cotg}\left(\ln(e^{\frac{3\pi}{2}})\right),\quad (3)\ \exp(2\ln(3e)),\quad (4)\ \mathrm{arcos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$(5)\ \mathrm{arcos}\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right),\ (6)\ \mathrm{arcotg}\left(\sqrt{3}\right),\ (7)\ \mathrm{cotg}\left(\mathrm{arcotg}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ (8)\ \mathrm{arcotg}\left(\mathrm{cotg}\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right).$$

A la première ligne, les expressions valent respectivement $\frac{1}{2}\ln 3 - 3\ln 2,\ 0,\ 9e^2$ et $\frac{3\pi}{4}$.

A la deuxième ligne, les expressions valent respectivement $\frac{4\pi}{5},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{7}$

III. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

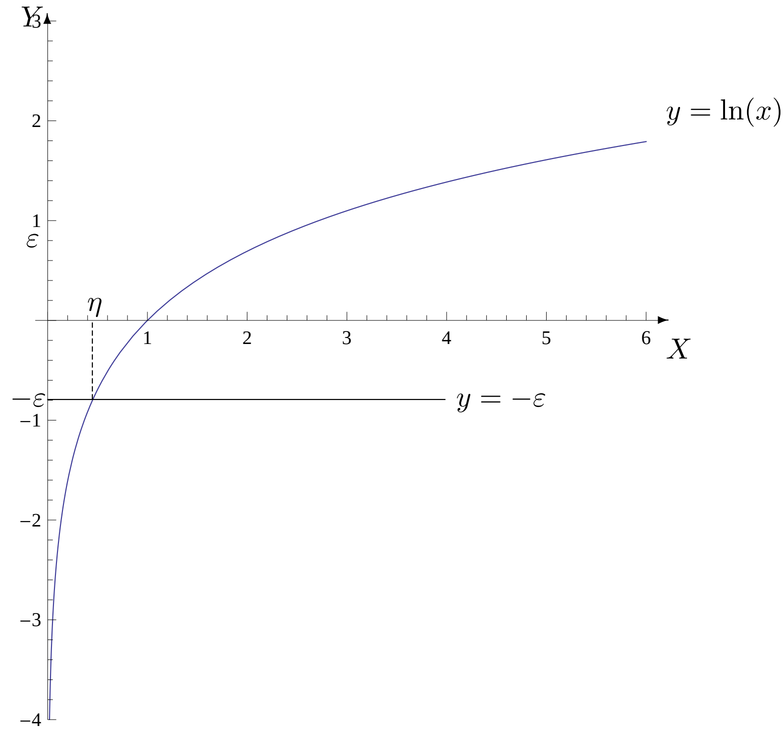
1. **On a**

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Exprimer mathématiquement explicitement la définition qui « se cache » derrière cette succession de symboles (qui « résument » en fait la définition) et en donner une interprétation graphique.

En mathématique, la définition de $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ est donnée par

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < x \leq \eta \Rightarrow \ln x \leq -\varepsilon.$$



2. **Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire les quelques limites suivantes par application du théorème de la limite des fonctions composées**

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{-1}{x}\right), \quad (b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\ln(|x|)}, \quad (c)\ \lim_{x\to(-1)^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

La limite (a) n'existe pas, la limite (b) vaut 0^+ et la limite (c) vaut $\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$.

3. **Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital***

$$(1)\ \lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-9} \qquad (2)\ \lim_{x\to+\infty}(-x^2+3x) \qquad (3)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}$$

$$(4)\ \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos(3x)} \quad (5)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x+4x^2}-\sqrt{4x^2+1}\right) \quad (6)\ \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \ln(\arcsin(x))$$

Les limites sont respectivement égales à

(1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) $-\infty$ (5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^-$; calculer la limite (6) n'a pas de sens.