1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Répétition 7 : correction

Version 17 octobre 2012(V1 : 29/08/09)

I. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital*

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|2-x|}$ (2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\sin(2x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(|-2x-\pi|)$ (5) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(4x-1)-\ln(4x))$ (6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^2+4x}{2x^2+1}$

Toutes ces limites, sauf la deuxième, peuvent être envisagées et on a

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|2-x|} = (-4)^+$ (3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\sin(2x)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^+$ (4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(|-2x-\pi|) = +\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(4x-1)-\ln(4x)) = 0^-$ (6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^2+4x}{2x^2+1} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^-$

II. Continuité et dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que $f : x \mapsto 4x^2 - x$ est dérivable en -1 et donner la valeur de sa dérivée en ce point.**

   Calculons $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(4h-9) = -9$. Comme cette limite existe et est finie, la fonction est dérivable en -1. La limite valant -9, la dérivée de cette fonction en -1 vaut -9.

2. **a) On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.**

   $\sqrt[5]{4x^2-1}$ $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ $\dfrac{1}{3x^2-6x+3}$ $\operatorname{arcotg}(\sin x)$ $(*)\ \sqrt{\cos(2x)}$ $\cos(\operatorname{tg}(x))$

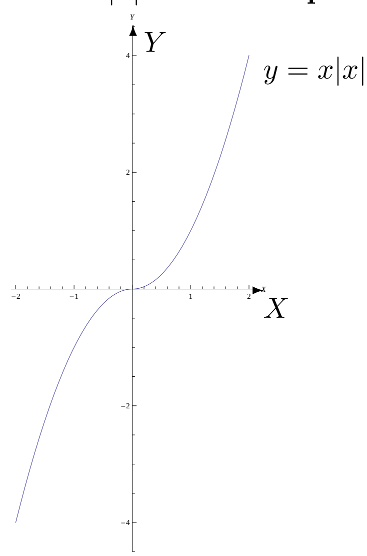
   $e^{\arcsin(x)}$ $\cos^2(3x)$ $\ln(x^6)$ $\ln(x^2-x-2)$ $(\ln(3))^x$ $x|x|$

   Si on note A le domaine de définition des fonctions, B leur domaine de continuité et C leur domaine de dérivabilité, on a les résultats suivants

f	$A = B$	C	Dérivée
$\sqrt[5]{4x^2-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$	$\dfrac{8x}{5\sqrt[5]{(4x^2-1)^4}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$	$]-\frac{1}{2},+\infty[$	$]-\frac{1}{2},+\infty[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{(1+2x)^3}}$
$\dfrac{1}{3x^2-6x+3}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\dfrac{-2}{3(x-1)^3}$
$\operatorname{arcotg}(\sin x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{-\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$

f	$A = B$	C	Dérivée
$\sqrt{\cos 2x}$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$	$\frac{-\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$
$\cos(\mathrm{tg}(x))$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\frac{-\sin(\mathrm{tg}(x))}{\cos^2(x)}$
$e^{\arcsin(x)}$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{e^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^2(3x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-3\sin(6x)$
$\ln(x^6)$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$\frac{6}{x}$
$\ln(x^2-x-2)$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$	$\frac{2x-1}{x^2-x-2}$
$(\ln(3))^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(\ln(3))\ (\ln(3))^x$
$x\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2\lvert x\rvert$

b) Représenter la fonction $x \mapsto x|x|$ dans un repère orthonormé.



3. **On donne la fonction g dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction $f : t \mapsto f(t) = g(\ln(t))$.**
a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
b) Calculer la dérivée de f en fonction de la dérivée de g.
c) Mêmes questions si g est dérivable sur $]0,3[$ et si f est la fonction $y \mapsto f(y) = g(\sqrt{y^2-1})$.

a) Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble $\left]\frac{1}{e}, e\right[$.

b) La dérivée de f est donnée par $Df(t) = D_y g(y)|_{y=\ln(t)} \cdot \frac{1}{t}$.
c) Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble $]-\sqrt{10},-1[\,\cup\,]1,\sqrt{10}[$ et la dérivée de f est donnée par $Df(y) = D_t g(t)|_{t=\sqrt{y^2-1}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$.

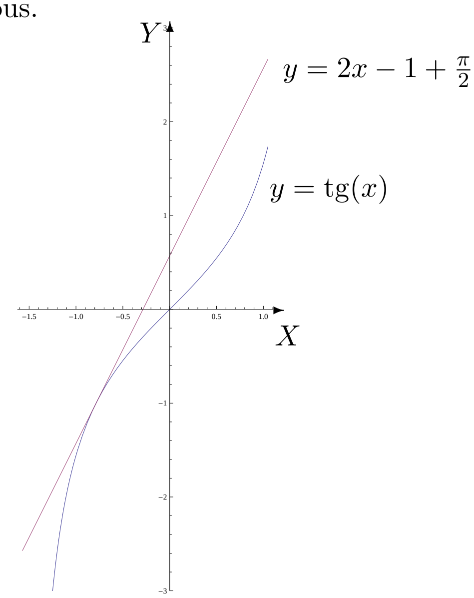
4. **Soit $F : t \mapsto F(t) = f(x(t))$ avec $x(3) = 2$, $Dx(3) = 5$ et $(D_x f)(2) = -4$. En supposant F dérivable en 3, que vaut $(DF)(3)$?**

   La dérivée de F en 3 vaut -20.

III. Divers

1. **Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \mathrm{tg}(x)$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{4}$. Représenter cette fonction et cette tangente.**

   L'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \mathrm{tg}(x)$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{4}$ est $2x - y - 1 + \frac{\pi}{2} = 0$; le graphique de cette fonction et de cette tangente se trouve ci-dessous.



2. **Représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 suivantes**

$$f_1(x) = \frac{-x + x^2 - 2}{2 + x}, \quad f_2(x) = xe^{-2x}.$$

   Une étude graphique permet de représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2. Voici leurs graphiques.