1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 7 Biologie : correction

Version 8 mars 2013

Approximations polynomiales

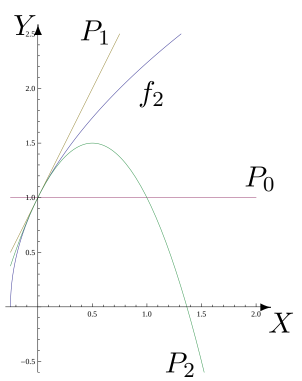
1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

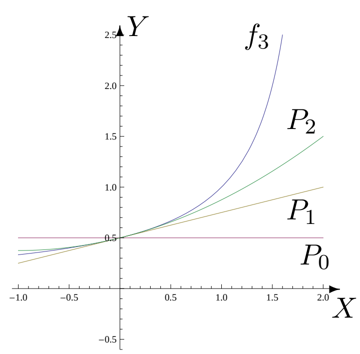
$$f_1(x) = \cos x\ e^{2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \qquad f_2(x) = \sqrt{1+4x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$$
$$f_3(x) = \frac{1}{2-x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2 \qquad f_4(x) = \text{arcotg}\ x,\ x_0 = 0, n = 0,1,2$$
$$f_5(x) = \sin^2 x,\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2 \qquad f_6(x) = \cos x,\ x_0 = 1, n = 0,1,2$$

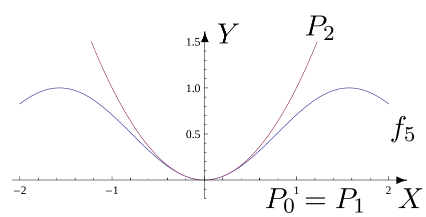
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+2x$	$1+2x+\frac{3}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_2	1	$1+2x$	$1+2x-2x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8},\ x\in\mathbb{R}$
f_4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}-x,\ x\in\mathbb{R}$
f_5	0	0	$x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_6	$\cos(1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)-\cos(1)\frac{(x-1)^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P_3(x) = 1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3},\ x\in\mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

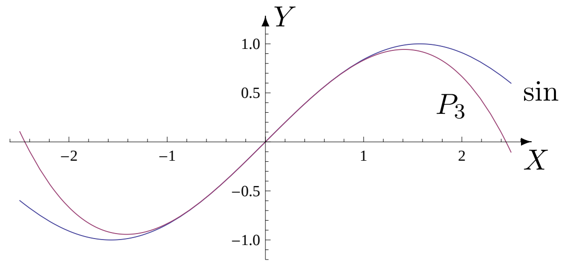






2. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre** 3 **en** 0 **de la fonction** sin **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P(x) = x - \frac{x^3}{6},\ x\in\mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\sin(u)}{4!}x^4,\ x\in\mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $\quad |R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24},\ \forall x\in\mathbb{R}$.



3. **Perdu dans le désert, en panne de gps et de toute batterie (calculette etc), un explorateur est amené à établir son itinéraire en se servant de cartes, des ≪ vieux ≫ moyens et de ses connaissances de base de ≪ calculus ≫. Il est amené à estimer la valeur du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés. Il souhaite avoir cette estimation avec une erreur strictement inférieure à un millième. Comment peut-il procéder ?**

   Une mesure d'angle égale à 20 degrés correspond au réel $\dfrac{\pi}{9} < \dfrac{1}{2}$.
   L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) du cosinus est donnée par

   $$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}$$

   et le reste associé vaut $R_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{\sin(u)}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_{2n}(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   Si $x = \dfrac{1}{2}$, l'inégalité

   $$\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 2.$$

   Dès lors, en prenant $n = 2$ et en approximant π par $22/7$, une valeur approchée du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés est donnée par

   $$P\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 - \frac{(\frac{\pi}{9})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{9})^4}{4!} = 1 - \frac{\pi^2}{162} + \frac{\pi^4}{81^2\ .\ 24} \approx 0,9396951.$$