
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (PARTIM B)

RÉPÉTITION 7 CHIMIE, GÉOGRAPHIE, PHYSIQUE : CORRECTION

Approximations polynomiales

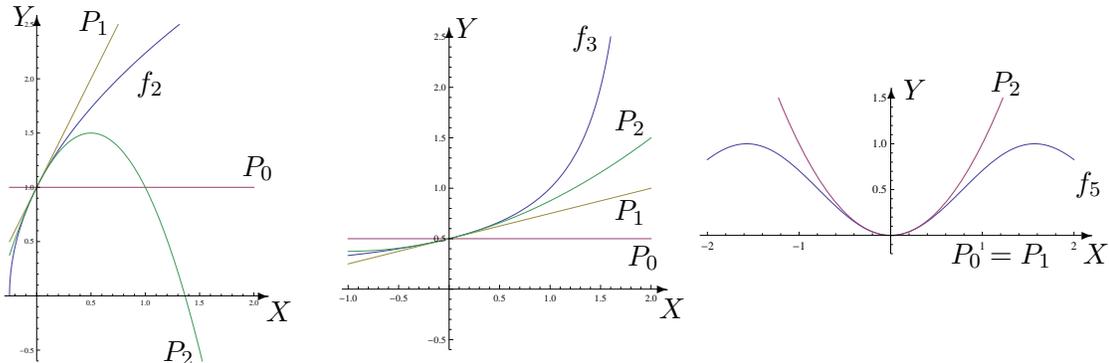
1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k . Représenter f_2 (—ou f_3 ou f_5 —) et ses approximations.

$$\begin{array}{ll}
 f_1(x) = \cos x e^{2x}, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 \\
 f_2(x) = \sqrt{1+4x}, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_3(x) = \frac{1}{2-x}, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_4(x) = \operatorname{arctg} x, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_5(x) = \sin^2 x, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_6(x) = \cos x, & x_0 = 1, n = 0, 1, 2
 \end{array}$$

Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1 + 2x$	$1 + 2x + \frac{3}{2}x^2, x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1 + 2x$	$1 + 2x - 2x^2, x \in \mathbb{R}$
f_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{x}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}, x \in \mathbb{R}$
f_4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x, x \in \mathbb{R}$
f_5	0	0	$x^2, x \in \mathbb{R}$
f_6	$\cos(1)$	$\cos(1) - \sin(1)(x - 1)$	$\cos(1) - \sin(1)(x - 1) - \cos(1)\frac{(x - 1)^2}{2}, x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P_3(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}, x \in \mathbb{R}$.

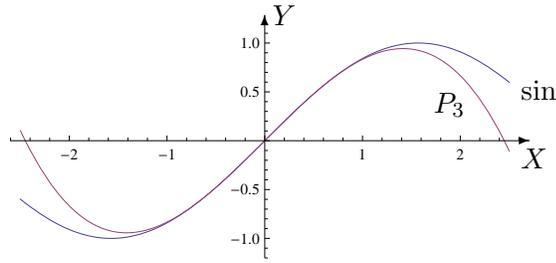
Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i .



2. a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction \sin et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

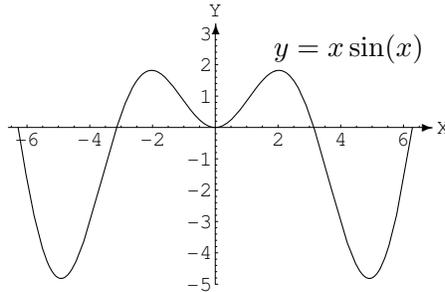
L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}, x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \frac{\sin(u)}{4!}x^4, x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x . Dès

lors, on a $|R_3(x)| \leq \frac{x^4}{24}, \forall x \in \mathbb{R}$.



b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction $f(x) = x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

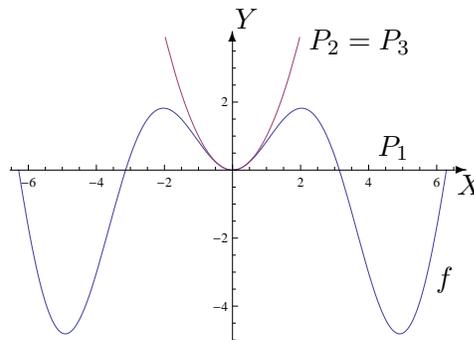
(Suggestion : $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$)



Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = x^2 = P_3(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Au voisinage de zéro, le graphique de f est

- 1) au-dessus de celui de P_1
- 2) en dessous de celui de $P_2 = P_3$



3. Perdu dans le désert, en panne de gps et de toute batterie (calculatrice etc), un explorateur est amené à établir son itinéraire en se servant de cartes, des « vieux » moyens et de ses connaissances de base de « calculus ». Il est amené à estimer la valeur du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés. Il souhaite avoir cette estimation avec une erreur strictement inférieure à un millièm.

Comment peut-il procéder ?

Une mesure d'angle égale à 20 degrés correspond au réel $\frac{\pi}{9} < \frac{1}{2}$.

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) du cosinus est donnée par

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{\sin(u)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x . Dès lors, on a $|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si $x = \frac{1}{2}$, l'inégalité

$$\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si } n \geq 2.$$

Dès lors, en prenant $n = 2$ et en approximant π par $22/7$, une valeur approchée du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés est donnée par

$$P\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 - \frac{(\frac{\pi}{9})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{9})^4}{4!} = 1 - \frac{\pi^2}{162} + \frac{\pi^4}{81^2 \cdot 24} \approx 0,9396951.$$

4. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 0, 1, 2, 3 en 0 des fonctions données par**¹

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x-2}{2x^2-x-1}.$$

Pour g_1 , les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1, 2, 3 en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = -x, \quad P_2(x) = -x, \quad P_3(x) = -x - \frac{x^3}{12}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour g_2 , les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1, 2, 3 en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = 2 - x, \quad P_2(x) = 2 - x + 5x^2, \quad P_3(x) = 2 - x + 5x^2 - 7x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. **Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.**

L'approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\frac{l^2}{8R}$.

1. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(2-x)$ et $\ln(2+x)$; décomposer en fractions simples