Université de Liège

1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Répétition 8 : correction

Version 21 novembre 2012

Limites et dérivées (suite)

1. **Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)**

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{x-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(3+\dfrac{1}{x}\right)$ (3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln\sqrt[3]{x}$ (5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}}$ (6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-1}{\operatorname{arcotg}(x^2+1)}$

(7) $\lim\limits_{t\to 1^-} (1-t)\ln(1-t^2)$ (8) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\ln(x-3)}{|3-x|}$ (9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{x+1}$

(10) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln(|3-x|)-\ln x^2\right)$ (11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ (12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

(13) $\lim\limits_{u\to +\infty} u\ e^{\frac{1}{u-1}}$ (14) $\lim\limits_{y\to +\infty} \log_y 4$ (15) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$

Fonction	dom(f)	Limite
1) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{x-1}=0^-$
2) $f(x)=x\ln\left(3+\dfrac{1}{x}\right)$	$]-\infty,-\frac{1}{3}[\,\cup\,]0,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(3+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$
3) $f(x)=\exp\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)=1^-$
4) $f(x)=\sqrt{x^3}\ln\sqrt[3]{x}$	$]0,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln\sqrt[3]{x}=0$
5) $f(x)=\dfrac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}$	$\mathbb{R}_0$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}=0$
6) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{\operatorname{arcotg}(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-1}{\operatorname{arcotg}(x^2+1)}=+\infty$
7) $f(t)=(1-t)\ln(1-t^2)$	$]-1,1[$	$\lim\limits_{t\to 1^-} (1-t)\ln(1-t^2)=0$
8) $f(x)=\dfrac{\ln(x-3)}{\|3-x\|}$	$]3,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\ln(x-3)}{\|3-x\|}$: pas de sens
9) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{x+1}$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]4,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{x+1}=0$
10) $f(x)=\ln(\|3-x\|)-\ln x^2$	$\mathbb{R}\setminus\{0,\ 3\}$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln(\|3-x\|)-\ln x^2\right)=-\infty$
11) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}=0$
12) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$	$\mathbb{R}_0\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$
13) $f(u)=u\ e^{\frac{1}{u-1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\lim\limits_{u\to +\infty} u\ e^{\frac{1}{u-1}}=+\infty$

Seuls les cas 4, 5, 7, 9, 11 et 12 nécessitent l'application du théorème de l'Hospital.

Fonction	dom(f)	Limite
14) $f(y) = \log_y 4$	$]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$	$\lim\limits_{y\to+\infty} \log_y 4 = 0^+$
15) $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}} = 0^+$

La limite $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\ln(x-3)}{|3-x|}$ n'a pas de sens car on peut trouver un intervalle ouvert comprenant 3 dont l'intersection avec dom$(f)\cap\,]-\infty,3[$ est vide.

2. **Une lentille convexe est caractérisée par une distance focale f. Si un objet se trouve à une distance p de la lentille, son image sera à une distance q liée à p par la relation $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, quelle est la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm ?**

   Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, la vitesse de variation de q vaut $Dq(p) = \dfrac{-9}{(p-3)^2}$; lorsque p vaut 33 cm elle est égale à $\dfrac{-1}{100}$. La distance q de l'image décroît donc à la vitesse de $\dfrac{1}{100}$ cm pour une variation de 1 cm de p.