1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 8 Biologie : correction

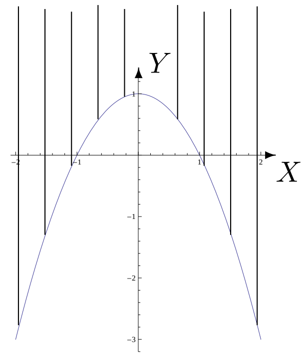
Version 20 mars 2013

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y-1}$$

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y-1 > 0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points de la parabole étant exclus.



   (b) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(2t+1, 3t^2)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

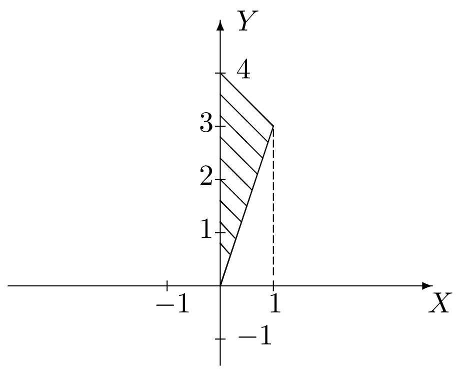
   La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \sqrt{7t^2+4t}$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : 7t^2+4t > 0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{7}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{7t+2}{\sqrt{7t^2+4t}}$.

   (c) **Que vaut la dérivée de F en 2 ? Simplifier votre réponse au maximum.**

   La dérivée de F en 2 vaut $\dfrac{8}{3}$.

2. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\int\int_A y\, e^{y-x} dxdy.$$



La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{y-x}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A ye^{y-x}dxdy = \frac{5}{4}(e^4-1)-e^2.$$

3. **On donne la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) **Déterminer les valeurs propres de A.**

   Les valeurs propres de A sont 2 et 3.

   (b) **Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, en donner une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis vérifier que ces matrices sont correctes.**

   Les valeurs propres étant simples, la matrice est diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) **Montrer que la matrice A vérifie $A^2-5A+6I=0$ où I est la matrice identité.**

4. **Soient les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si c'est possible, calculer

   (a) **1)** AB **2)** BA **3)** BC **4)** CB **5)** AC **6)** CA

   1) Le produit AB est impossible à calculer car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.
   2) Le produit BA est la matrice ligne $(-5 \;\; 4)$.
   3) Le produit BC est la matrice de dimension 1 dont l'élément est $-8-3i$.
   4) Le produit CB est la matrice

$$\begin{pmatrix} -3i & 2i \\ 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

   5) Le produit AC est la matrice

$$\begin{pmatrix} 8+i \\ 4-i \end{pmatrix}.$$

   6) Le produit CA est impossible à calculer car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

   (b) **le déterminant des matrices obtenues ci-dessus**
   Comme on ne peut calculer que le déterminant d'une matrice carrée, le déterminant de BC vaut $-8-3i$ et celui de CB vaut 0.

(c) **la matrice inverse de A et des matrices obtenues ci-dessus**

La matrice inverse de A est la matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de BC est $\frac{-8+3i}{73}$.
Comme on ne peut calculer l'inverse que de matrices carrées de déterminant différent de zéro, les autres matrices n'ont pas d'inverse.

5. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \text{tg}(3x).$$

(a) **Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.**
Si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = 3x = P_2(x), \quad P_3(x) = 3x + 9x^3,\ x \in \mathbb{R};$$

(b) **Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de 0 en utilisant différentes couleurs.**