1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 9 Chimie, Géographie, Physique : correction

Version 5 mars 2013

Suites

1. **Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence** :

a) $x_m = \dfrac{3m^2+2m+1}{4m^2+1}$ $(m \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+3}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = 2n - \sqrt{n^3+n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = \dfrac{3n+(-1)^{n+1}}{4n+(-1)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(3n^2+n) - \ln(3n-1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^3}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

g) $x_n = \dfrac{n\cos(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \dfrac{(j-1)!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

i) $x_j = \dfrac{j!\,(j+1)!}{(2j+1)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

j) [1] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

a) La suite converge vers $\frac{3}{4}$
b) La suite converge vers 2
c) La suite converge vers $-\infty$
d) La suite converge vers $\frac{3}{4}$
e) La suite converge vers $+\infty$
f) La suite converge vers 1
g) La suite converge vers 0
h) La suite converge vers 0
i) La suite converge vers 0
j) La suite converge vers $\frac{1}{3}$

2. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par**

$$u_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{2n}$$

est divergente.

Cette suite est divergente car, par exemple, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ convergent vers des limites différentes.

3. **Montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon**

$$x_0 = \sqrt{6} \qquad \textbf{et} \qquad x_j = \sqrt{6+x_{j-1}} \quad ,\forall j \in \mathbb{N}_0$$

est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

La suite est croissante et majorée par 3 ; elle converge vers 3.

4. **Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :**

$$x_0 > 0 \qquad \textbf{et} \qquad 0 < x_{n+1} \leq 4 - \frac{4}{x_n} \quad ,\forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite converge, en préciser la limite.

La suite est décroissante et minorée par 0 ; elle converge vers 2.

1. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. **Soient $a, b \in \mathbb{R}_0$ avec $a \neq 1$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par**

$$u_{n+1} = au_n + b, \; u_0 \in \mathbb{R}.$$

i) **En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule limite L possible de cette suite ?**

Si $a \neq 1$, la seule limite possible de cette suite est $\dfrac{b}{1-a}$

ii) **Définissons $v_n = u_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

Si $u_0 = L$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L quel que soit a.
Si $u_0 \neq L$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- converge vers une limite finie si $a \in]-1, 1[\setminus\{0\}$
- converge vers une limite infinie si $a < -1$ ou si $a > 1$
- diverge si $a = -1$.

iii) Application : **considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons A_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $A_0 = 0$?**

Comme $A_n = \dfrac{8}{9}A_{n-1} + \dfrac{1}{9}$, la limite de cette suite vaut 1.