1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 9 Géologie : correction

Version 5 mars 2013

I. Suites

1. **Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence** :

a) $x_m = \dfrac{3m^2+2m+1}{4m^2+1}$ $(m \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+3}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = 2n - \sqrt{n^3+n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = \dfrac{3n+(-1)^{n+1}}{4n+(-1)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(3n^2+n) - \ln(3n-1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^3}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

g) $x_n = \dfrac{n\cos(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \dfrac{(j-1)!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

i) $x_j = \dfrac{j!\,(j+1)!}{(2j+1)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

j)[1] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

a) La suite converge vers $\frac{3}{4}$
b) La suite converge vers 2
c) La suite converge vers $-\infty$
d) La suite converge vers $\frac{3}{4}$
e) La suite converge vers $+\infty$
f) La suite converge vers 1
g) La suite converge vers 0
h) La suite converge vers 0
i) La suite converge vers 0
j) La suite converge vers $\frac{1}{3}$

2. **Montrer que la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ **définie par**

$$u_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{2n}$$

est divergente.

Cette suite est divergente car, par exemple, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ convergent vers des limites différentes.

II. Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{n\ln(n)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

a) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{3} \in \,]-1,1[$
c) Série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
d) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

1. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent** :

$$\text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^j \qquad \text{b) } \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+3)} \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} \qquad \text{d) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^{2k-1}}{k!}$$

a) Série géométrique divergente car $\sqrt{3} \notin \,]-1, 1[$
b) Série convergente dont la somme vaut $\frac{5}{12}$
c) Série géométrique convergente car $\frac{2}{3} \in \,]-1, 1[$; la somme de la série vaut 24
d) Série définissant l'exponentielle de 16 ; la somme de la série vaut $\frac{e^{16}-1}{4}$