
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (PARTIM B)

RÉPÉTITION 9 INFORMATIQUE : CORRECTION

Suites

1. **Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence :**

a) $x_m = \frac{3m^2 + 2m + 1}{4m^2 + 1} \quad (m \in \mathbb{N})$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^3} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$

b) $x_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \quad (n \in \mathbb{N})$

g) $x_n = \frac{n \cos(n!)}{n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = 2n - \sqrt{n^3 + n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \frac{(j-1)!}{j^j} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$

d) $x_n = \frac{3n + (-1)^{n+1}}{4n + (-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

i) $x_j = \frac{j! (j+1)!}{(2j+1)!} \quad (j \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(3n^2 + n) - \ln(3n - 1) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

j) $x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

a) La suite converge vers $\frac{3}{4}$

f) La suite converge vers 1

b) La suite converge vers 2

g) La suite converge vers 0

c) La suite converge vers $-\infty$

h) La suite converge vers 0

d) La suite converge vers $\frac{3}{4}$

i) La suite converge vers 0

e) La suite converge vers $+\infty$

j) La suite converge vers $\frac{1}{3}$

2. **Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ définie par**

$$u_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{2n}$$

est divergente.

Cette suite est divergente car, par exemple, les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergent vers des limites différentes.

3. **Montrer que la suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence selon**

$$x_0 = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad x_j = \sqrt{6 + x_{j-1}} \quad , \forall j \in \mathbb{N}_0$$

est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

La suite est croissante et majorée par 3; elle converge vers 3.

4. **Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :**

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad 0 < x_{n+1} \leq 4 - \frac{4}{x_n} \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite converge, en préciser la limite.

La suite est décroissante et minorée par 0; elle converge vers 2.

1. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_0$ avec $a \neq 1$ ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

i) En supposant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule limite L possible de cette suite ?

Si $a \neq 1$, la seule limite possible de cette suite est $\frac{b}{1-a}$

ii) Définissons $v_n = u_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $u_0 = L$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L quel que soit a .

Si $u_0 \neq L$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- converge vers une limite finie si $a \in]-1, 1[\setminus \{0\}$

- converge vers une limite infinie si $a < -1$ ou si $a > 1$

- diverge si $a = -1$.

iii) Application : considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons A_n l'aire coloriée après l'étape n . Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $A_0 = 0$?

Comme $A_n = \frac{8}{9}A_{n-1} + \frac{1}{9}$, la limite de cette suite vaut 1.