1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2012-2013

Mathématiques générales A : corrigé du test 1

Version 12 octobre 2012

Corrigé du test 1 du 08-10-2012

1. **Soit la conique d'équation $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, avec $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}_0$. De quel type de conique s'agit-il ? En fonction des éléments donnés dans l'équation, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations de ses asymptotes éventuelles et la valeur de son excentricité.**

   Solution. L'équation donnée est celle d'une ellipse ; cette conique n'a pas d'asymptote.
   Ses foyers sont les points de coordonnées $(-\sqrt{b^2-a^2},0)$ et $(\sqrt{b^2-a^2},0)$.
   Ses points d'intersection avec les axes ont pour coordonnées $(0,-a)$, $(0,a)$, $(-b,0)$ et $(b,0)$.
   Son excentricité vaut $e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$.

2. **Un vieil homme sans enfant décide de léguer 150.000 euros à ses employés lors de son décès. Quelques mois avant sa mort, il licencie cinq d'entre eux. Chaque employé restant reçoit alors 1000 euros supplémentaires. Sachant que les parts sont égales, combien d'employés le vieil homme avait-il au départ ?**
   Suggestion : $55^2=3025$**.**

   Solution.
   Données :
   1) on partage 150.00 euros en parts égales entre les employés
   2) après le licenciement de 5 employés, la part de ceux qui restent est celle initialement prévue augmentée de 1 000 euros.
   Inconnue : le nombre d'employés au départ.

   Soit x le nombre d'employés au départ ; la part de chacun vaut $\frac{150\ 000}{x}$ euros.
   Le nombre d'employés au décès du vieil homme est $x-5$ et la part de chacun vaut alors $\frac{150\ 000}{x-5}$ euros mais aussi $\frac{150\ 000}{x}+1\ 000$ euros. Dès lors, on a l'équation

   $$\frac{150\ 000}{x-5}=\frac{150\ 000}{x}+1\ 000 \Leftrightarrow 150\ 000\,x=(150\ 000+1\ 000\,x)(x-5)$$

   $$\Leftrightarrow 0=1\ 000\,x^2-750\ 000-5\ 000x \Leftrightarrow x^2-5\,x-750=0$$

   Comme $\Delta=25-4\ .\ (-750)=3025=55^2$, les solutions de l'équation sont données par

   $$\left(x=\frac{5+55}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{5-55}{2}\right)\Leftrightarrow (x=30 \quad \text{ou} \quad x=-25)$$

   Ainsi au départ, le vieil homme avait 30 employés, la valeur négative -25 étant à rejeter.

3. **Résoudre l'équation suivante dans $[-\pi,\pi]$.**

   $$\cos 3x=\sin x$$

   Solution. L'équation est équivalente à

   $$\cos(3x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow\left(3x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x=-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right)$$

   $$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

   Dès lors, les solutions dans $[-\pi,\pi]$ sont $-\frac{7\pi}{8}$, $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Corrigé du test 1 du 12-10-2012

1. **Soit la conique d'équation $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}_0$. De quel type de conique s'agit-il ? En fonction des éléments donnés dans l'équation, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations de ses asymptotes éventuelles et la valeur de son excentricité.**

   Solution. L'équation donnée est celle d'une hyperbole.
   Ses foyers sont les points de coordonnées $(-\sqrt{b^2+a^2}, 0)$ et $(\sqrt{b^2+a^2}, 0)$.
   Ses points d'intersection avec les axes ont pour coordonnées $(-b, 0)$ et $(b, 0)$.
   Ses asymptotes ont pour équation cartésienne $y = \frac{a}{b}\,x$ et $y = -\frac{a}{b}\,x$.
   Son excentricité vaut $e = \dfrac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$.

2. **Un vieil homme sans enfant décide de léguer 150.000 euros à ses employés lors de son décès. Quelques mois avant sa mort, il en engage cinq de plus. Chaque ancien employé reçoit alors 1000 euros de moins. Sachant que les parts sont égales, combien d'employés le vieil homme avait-il au départ ?**
   Suggestion : $55^2 = 3025$.

   Solution.
   Données :
   1) on partage 150.00 euros en parts égales entre les employés
   2) après l'engagement de 5 employés, la part de chacun est celle des anciens employés diminuée de 1 000 euros.
   Inconnue : le nombre d'employés au départ.

   Soit x le nombre d'employés au départ ; la part de chacun vaut $\frac{150\ 000}{x}$ euros.
   Le nombre d'employés au décès du vieil homme est $x+5$ et la part de chacun vaut alors $\frac{150\ 000}{x+5}$ euros mais aussi $\frac{150\ 000}{x} - 1\ 000$ euros. Dès lors, on a l'équation

   $$\frac{150\ 000}{x+5} = \frac{150\ 000}{x} - 1\ 000 \Leftrightarrow 150\ 000\,x = (150\ 000 - 1\ 000\,x)(x+5)$$

   $$\Leftrightarrow 0 = -1\ 000\,x^2 + 750\ 000 - 5\ 000x \Leftrightarrow x^2 + 5\,x - 750 = 0$$

   Comme $\Delta = 25 - 4\ .\ (-750) = 3025 = 55^2$, les solutions de l'équation sont données par

   $$\left(x = \frac{-5+55}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5-55}{2}\right) \Leftrightarrow (x = 25 \quad \text{ou} \quad x = -30)$$

   Ainsi au départ, le vieil homme avait 25 employés, la valeur négative -30 étant à rejeter.

3. **Résoudre l'équation suivante dans $[-\pi, \pi]$.**

   $$\cos x = \sin 3x$$

   Solution. L'équation est équivalente à

   $$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\right)$$

   $$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

   Dès lors, les solutions dans $[-\pi, \pi]$ sont $-\frac{7\pi}{8}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{8}$.