1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2012-2013

Mathématique et physique : 1er bachelier

Test du 17-09-12

Correction

Problèmes élémentaires

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.
Mathématique :
1) Une citerne parallélépipédique a une base carrée de 3 m de côté. Lors d'un orage, le niveau de son eau s'élève de 2 cm. A combien de litres par m^2 cela correspond-il ?

Solution. Lors de l'orage, le volume a augmenté de $3^2 \ . \ 2.10^{-2} \ m^3$, c'est-à-dire 180 dm^3. Ce volume correspond à une capacité de 180 litres. Comme l'aire de la base de la citerne est égale à 9 m^2, on en déduit qu'il a plu 20 ℓ/m^2.

2) Si le réel exprimant le périmètre d'un carré évalué en dm est égal au réel exprimant sa surface évaluée en m^2, que vaut la longueur d'un de ses côtés (en centimètre) ?

Solution. Soit $x > 0$ la longueur en centimètres d'un côté du carré.
Le périmètre évalué en dm vaut donc $0,4\,x \ dm$ et la surface évaluée en m^2 vaut $10^{-4} \ x^2 \ m^2$.
Puisque ces réels sont égaux, on a l'égalité

$$0,4\,x = 10^{-4}x^2 \Leftrightarrow (4.10^3 - x)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4\ 000.$$

Dès lors, la longueur d'un côté du carré est 4 000 cm.

Physique :
Sur Terre, en négligeant les frottements de l'air, donner une approximation, en nombre entier de secondes, du temps de chute d'un corps lâché d'une altitude de 180 m.

Solution. Si $t \in \mathbb{N}_0$ est le temps de chute du corps exprimé en secondes, on a $180 = \frac{1}{2}gt^2$, g étant l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre.
En prenant g égal à 10 m/s^2, on a alors $36 = t^2 \Leftrightarrow t = 6$ puisque $t > 0$. Ainsi, un corps lâché à 180 m met approximativement 6 secondes avant de toucher le sol.

Transcodage

1. **Exprimer en français la propriété ci-dessous (ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime ≪ $a + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ≫ par ≪ la somme de deux réels ≫ et non ≪ a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ≫) :**

$$m\,! = 1 \ . \ 2 \ . \ 3 \ . \ \ldots (m-1) \ . \ m, \ m \in \mathbb{N}_0 \quad (m\,! \text{ se lit ≪ factorielle de } m \text{ ≫})$$

Solution. La factorielle d'un naturel non nul m est le produit des m premiers naturels non nuls.

2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
≪ la fréquence du mouvement d'un objet situé à l'extrémité d'un ressort est égale au produit d'une constante strictement positive par la racine carrée du quotient de la constante de raideur du ressort par la masse de l'objet. ≫.

Solution. Si ν est la fréquence du mouvement d'un corps de masse m situé à l'extrémité d'un ressort de raideur r, alors on a

$$\nu = K\sqrt{\frac{r}{m}}, \ K \text{ étant une constante strictement positive.}$$

Techniques de calcul

1. **Résoudre (x est une inconnue réelle)**

$$\text{(a) } \frac{4}{15}x + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} \qquad \text{(b) } x^2 - 1 = 2x \qquad \text{(c) } x + 1 \leq \frac{1}{x+1}$$

Solution.

1. (a) On a

$$\frac{4}{15}x + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow \frac{16x + 15}{60} = \frac{12x}{60} \Leftrightarrow 4x = -15.$$

Dès lors, en divisant les deux membres par 4, on obtient $x = -\frac{15}{4}$ et l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{-\dfrac{15}{4}\right\}$.

(b) L'équation donnée est équivalente à $x^2 - 2x - 1 = 0$. Comme son réalisant $\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-1) = 8$, les solutions sont $\dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $\dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{1 - \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2}\right\}$.

(c) Si $x \neq -1$, l'inéquation donnée est équivalente à $\dfrac{(x+1)^2 - 1}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x+2)}{x+1} \leq 0$. En étudiant le signe du premier membre, on a $x \leq -2$ ou $x \in]-1, 0]$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S =]-\infty, -2] \cup]-1, 0]$.

2. **Résoudre (x est une inconnue réelle)** $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **et donner les solutions dans** $[\pi, 3\pi]$**.**

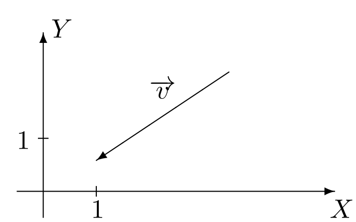
Solution. L'équation donnée est équivalente à $\cos(2x) = \cos\frac{\pi}{6}$ qui a pour solutions

$$\left(2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

L'ensemble des solutions dans $[\pi, 3\pi]$ est alors $S = \left\{\dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}, \dfrac{25\pi}{12}, \dfrac{35\pi}{12}\right\}$.

Représentation graphique

1. **Dans un repère orthonormé du plan, on donne le vecteur libre $\vec{v}$ par la représentation ci-contre. On suppose que la mesure de l'angle entre ce vecteur et le vecteur de base de l'axe X est $\theta \in [0, \pi]$ et que la longueur du vecteur (c'est-à-dire sa norme) est égale à $r > 0$. Dans ce cas, en utilisant les données et les notations de l'énoncé, que vaut la deuxième composante du vecteur $\vec{v}$?**



Solution. Avec les notations de l'énoncé, la deuxième composante du vecteur $\vec{v}$ est $-r\sin(\theta)$.

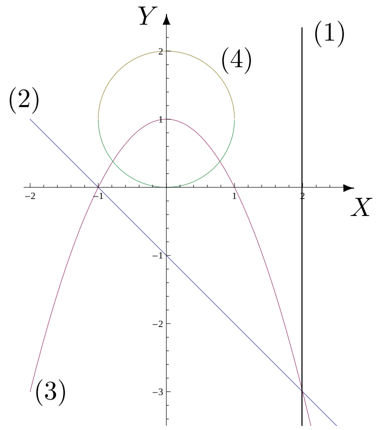
2. **Dans un même repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation**

(1) $x - 2 = 0$

(2) $x + y + 1 = 0$

(3) $x^2 + y - 1 = 0$

(4) $x^2 + y^2 - 2y = 0$



$\boxed{\textbf{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et l'encadrer ou la surligner.

1. Si on divise par trois la longueur du rayon d'un cercle, alors
   (a) l'aire de ce disque est divisée par 3
   (b) ♣ le périmètre de ce cercle est divisé par 3
   (c) le volume du cylindre dont les bases sont composées de ce disque et dont la hauteur n'est pas modifiée est divisé par 3
   (d) il est nécessaire de connaître la taille initiale du rayon du cercle pour pouvoir répondre à cette question
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. Si on achète un article soldé de 30 %, cela signifie que, pour connaître son prix de départ, le prix soldé doit être
   (a) multiplié par 0,3 (b) multiplié par 0,7
   (c) divisé par 0,3 (d) ♣ divisé par 0,7
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. Un tiers d'un récipient est rempli d'eau. On ajoute alors une quantité d'eau égale aux trois quarts du volume libre restant. Au total, quelle part du volume du récipient est-elle remplie d'eau ?
   (a) 1/6 (b) 2/5 (c) ♣ 5/6 (d) 1
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. La force gravitationnelle entre deux objets est donnée par la formule suivante
   $$F = \frac{G m_1 m_2}{d^2}$$
   où G est la constante gravitationnelle, m_1 et m_2 sont les masses des deux objets et d est la distance qui les sépare.
   Si on remplace l'un des deux objets par un objet trois fois plus massif, comment la distance d doit-elle être modifiée pour laisser la force gravitationnelle inchangée ?
   (a) Elle doit être divisée par $\sqrt{3}$ (b) ♣ Elle doit être multipliée par $\sqrt{3}$
   (c) Elle doit être divisée par 3 (d) Elle doit être multipliée par 3
   (e) Elle doit être divisée par 9
5. Le graphique ci-dessous représente la position x en fonction du temps t d'un mobile qui se déplace de manière rectiligne. Si b et c sont deux constantes réelles strictement positives, laquelle des expressions données décrit le mieux l'accélération a du mobile ?
   (a) $a(t) = 0$
   (b) $a(t) = -b$
   (c) $a(t) = +c$
   (d) ♣ $a(t) = ct - b$
   (e) $a(t) = -ct + b$