1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2012-2013

Mathématiques générales A : corrigé du test 2

Version 24 octobre 2012

Corrigé du test 2 du 29-10-2012

1. **Un professeur veut faire faire un travail de groupe à ses étudiants. S'il fait des groupes de 3, il reste deux étudiants sans groupe, s'il fait des groupes de 5, il reste un seul étudiant. Sachant qu'il y a trois groupes de 3 de plus que le nombre de groupes de 5, combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe ?**

   Solution.
   Données :
   1) le nombre d'étudiants est un multiple de 3 augmenté de 2
   2) le nombre d'étudiants est un multiple de 5 augmenté de 1
   3) le nombre de groupes de 3 étudiants est égal au nombre de groupes de 5 étudiants augmenté de 3
   Inconnue : le nombre d'étudiants de la classe.

   Soit x le nombre de groupes de 5 étudiants et $x+3$ le nombre de groupes de 3 étudiants. Dès lors, le nombre d'étudiants de la classe vaut $5x+1$ ou $3(x+3)+2$ et on a l'équation

$$5x+1 = 3(x+3)+2 \Leftrightarrow 5x-3x = 9+2-1 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5.$$

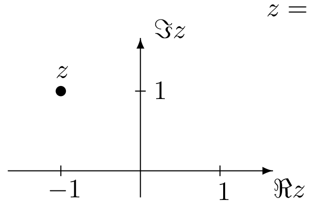
   La classe comprend donc $5\ .\ 5+1 = 26$ étudiants.

2. **Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module et la forme trigonométrique du complexe suivant. Représenter ce complexe dans le plan muni d'un repère orthonormé ("X=axe réel" et "Y=axe imaginaire")**

$$\frac{2i}{1-i}$$

   Solution. On a $z = \dfrac{2i}{1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i-2}{2} = -1+i.$
   Dès lors, $\Re z = -1$, $\Im z = 1$, $\overline{z} = -1-i$ et $|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.
   Pour déterminer la forme trigonométrique, on sait que $-1 = \sqrt{2}\cos(\theta)$ et $1 = \sqrt{2}\sin(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Ainsi,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$



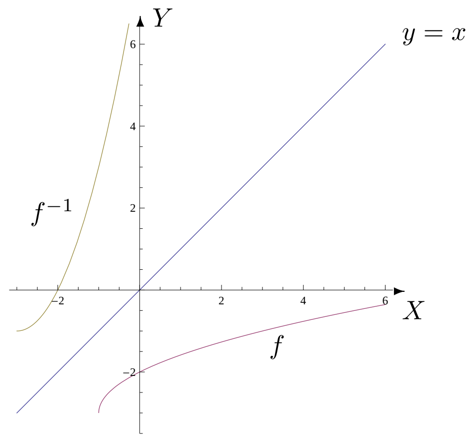
3. **Donner le domaine de définition et l'image de la fonction f donnée explicitement par**

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 3.$$

   Déterminer, si elle existe, sa fonction inverse. Représenter alors f et sa fonction inverse dans le même repère orthonormé.

   Solution. Le domaine de définition de f est donné par $\{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$; son image est l'ensemble $[-3, +\infty[$. En effet, d'une part, on a $\mathrm{im}(f) \subset [-3, +\infty[$ car si $x \geq -1$, on a $\sqrt{x+1} \geq 0$ et donc $\sqrt{x+1} - 3 \geq -3$; d'autre part, on a $[-3, +\infty[\subset \mathrm{im}(f)$ car si $y \geq -3$ alors $x = (y+3)^2 - 1$ est tel que $f(x) = y$.
   Cette fonction est injective donc admet une fonction inverse donnée par

$$f^{-1} : [-3, +\infty[\to [-1, +\infty[: y \mapsto (y+3)^2 - 1 = y^2 + 6y + 8.$$



Corrigé du test 2 du 31-10-2012

1. **Un professeur veut faire faire un travail de groupe à ses étudiants. S'il fait des groupes de 3, il reste deux étudiants sans groupe, s'il fait des groupes de 5, il reste trois étudiants. Sachant qu'il y a trois groupes de 3 de plus que le nombre de groupes de 5, combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe ?**

   Solution.
   Données :
   1) le nombre d'étudiants est un multiple de 3 augmenté de 2
   2) le nombre d'étudiants est un multiple de 5 augmenté de 3
   3) le nombre de groupes de 3 étudiants est égal au nombre de groupes de 5 étudiants augmenté de 3
   Inconnue : le nombre d'étudiants de la classe.

   Soit x le nombre de groupes de 5 étudiants et $x+3$ le nombre de groupes de 3 étudiants. Dès lors, le nombre d'étudiants de la classe vaut $5x+3$ ou $3(x+3)+2$ et on a l'équation

   $$5x + 3 = 3(x+3) + 2 \Leftrightarrow 5x - 3x = 9 + 2 - 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

   La classe comprend donc $5\ .\ 4 + 3 = 23$ étudiants.

2. **Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module et la forme trigonométrique du complexe suivant. Représenter ce complexe dans le plan muni d'un repère orthonormé ("X=axe réel" et "Y=axe imaginaire")**

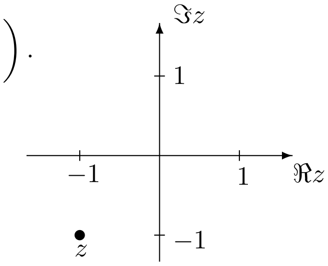
   $$\frac{2}{i-1}$$

   Solution. On a $z = \dfrac{2}{i-1} = \dfrac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \dfrac{2(-1-i)}{2} = -1-i.$

   Dès lors, $\Re z = -1$, $\Im z = -1$, $\overline{z} = -1+i$ et $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

   Pour déterminer la forme trigonométrique, on sait que $-1 = \sqrt{2}\cos(\theta)$ et $-1 = \sqrt{2}\sin(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Ainsi,

   $$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$



3. **Donner le domaine de définition et l'image de la fonction f donnée explicitement par**

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}.$$

Déterminer, si elle existe, sa fonction inverse. Représenter alors f et sa fonction inverse dans le même repère orthonormé.

Solution. Le domaine de définition de f est donné par $\{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty[$; son image est l'ensemble $[1, +\infty[$. En effet, d'une part, on a $\mathrm{im}(f) \subset [1, +\infty[$ car si $x \geq 2$, on a $\sqrt{x-2} \geq 0$ et donc $\sqrt{x-2} + 1 \geq 1$; d'autre part, on a $[1, +\infty[\subset \mathrm{im}(f)$ car si $y \geq 1$ alors $x = (y-1)^2 + 2$ est tel que $f(x) = y$.
Cette fonction est injective donc admet une fonction inverse donnée par

$$f^{-1} : [1, +\infty[\to [2, +\infty[: y \mapsto (y-1)^2 + 2 = y^2 - 2y + 3.$$