1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Mathématiques générales A : corrigé du test 3

Version 19 novembre 2012

Corrigé du test 3 du 16-11-2012

1. **Quel est le lien entre dérivabilité et continuité ?**

Solution. Si la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ alors elle est continue sur $]a, b[$.
La réciproque de cette propriété est fausse.

2. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2}$$

Solution. La fraction donnée est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+1) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

Cette fraction étant propre, il existe des réels uniques A et B tels que

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

Cette égalité est équivalente à

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

Ces fractions étant égales et ayant le même dénominateur, vu les propriétés des polynômes, on a $3x = A(x+1) + B(x-2)$ pour tout réel x.
Dès lors, si $x = 2$, on a $6 = 3A \Leftrightarrow A = 2$ et si $x = -1$, on a $-3 = -3B \Leftrightarrow B = 1$.

Ainsi, on obtient

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

3. **Calculer (si possible) la limite suivante, sans appliquer le théorème de l'Hospital.**

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

Solution. La fraction $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
Comme tout intervalle ouvert contenant 2 rencontre le domaine de définition A, le calcul de la limite en 2 peut être envisagé et on a

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}.$$

Corrigé du test 3 du 19-11-2012

1. **Quel est le lien entre la dérivée d'une fonction et sa croissance ?**

   Solution. Soit f une fonction réelle dérivable sur $I =]a, b[$.
   La fonction f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée première est une fonction positive sur I.
   Si la dérivée première de f est strictement positive sur I alors la fonction f est strictement croissante sur I. La réciproque de cette propriété est fausse.

2. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**
$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}$$

   Solution. La fraction donnée est définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(x-1) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\}$$
   Cette fraction étant propre, il existe des réels uniques A et B tels que
$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\}.$$
   Cette égalité est équivalente à
$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\}.$$
   Ces fractions étant égales et ayant le même dénominateur, vu les propriétés des polynômes, on a $x+1 = A(x-1) + B(x-3)$ pour tout réel x.
   Dès lors, si $x = 3$, on a $4 = 2A \Leftrightarrow A = 2$ et si $x = 1$, on a $2 = -2B \Leftrightarrow B = -1$.

   Ainsi, on obtient
$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\}.$$

3. **Calculer (si possible) la limite suivante, sans appliquer le théorème de l'Hospital.**
$$\lim_{x \to 3} \frac{9-x^2}{x^2-4x+3}$$

   Solution. La fraction $f(x) = \dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\}$.
   Comme tout intervalle ouvert contenant 3 rencontre le domaine de définition A, le calcul de la limite en 3 peut être envisagé et on a
$$\lim_{x \to 3} \frac{9-x^2}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 3} \frac{(3-x)(3+x)}{(x-3)(x-1)} = -\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-1} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Corrigé du test 3 du 21-11-2012

1. **Quel est le lien entre dérivabilité et continuité ?**

   Solution. Si la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ alors elle est continue sur $]a, b[$.
   La réciproque de cette propriété est fausse.

2. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}$$

   Solution. La fraction donnée est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2+5x+6 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x+3) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3,\, -2\}$$

   Cette fraction étant propre, il existe des réels uniques A et B tels que

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,\, -2\}.$$

   Cette égalité est équivalente à

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+3)(x+2)},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,\, -2\}.$$

   Ces fractions étant égales et ayant le même dénominateur, vu les propriétés des polynômes, on a $x+1 = A(x+3)+B(x+2)$ pour tout réel x.
   Dès lors, si $x=-2$, on a $-1 = A$ et si $x=-3$, on a $-2 = -B \Leftrightarrow B = 2$.

   Ainsi, on obtient

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+3},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,\, -2\}.$$

3. **Calculer (si possible) la limite suivante, sans appliquer le théorème de l'Hospital.**

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$$

   Solution. La fraction $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{-3,\, -2\}$.
   Comme tout intervalle ouvert contenant -2 rencontre le domaine de définition A, le calcul de la limite en -2 peut être envisagé et on a

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x+3} = 0.$$

Corrigé du test 3 du 23-11-2012

1. **Quel est le lien entre la dérivée seconde d'une fonction et sa concavité ?**

   Solution. Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur $I =]a, b[$.
   f est convexe (respectivement concave) sur I si et seulement si sa dérivée seconde est une fonction positive (respectivement négative) sur I.

2. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**
$$\frac{-x-5}{x^2+x-2}$$

   Solution. La fraction donnée est définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2+x-2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x-1) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 1\}$$
   Cette fraction étant propre, il existe des réels uniques A et B tels que
$$\frac{-x-5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 1\}.$$
   Cette égalité est équivalente à
$$\frac{-x-5}{x^2+x-2} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x-1)(x+2)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 1\}.$$
   Ces fractions étant égales et ayant le même dénominateur, vu les propriétés des polynômes, on a $-x-5 = A(x-1)+B(x+2)$ pour tout réel x.
   Dès lors, si $x=-2$, on a $-3=-3A \Leftrightarrow A=1$ et si $x=1$, on a $-6=3B \Leftrightarrow B=-2$.

   Ainsi, on obtient
$$\frac{-x-5}{x^2+x-2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 1\}.$$

3. **Calculer (si possible) la limite suivante, sans appliquer le théorème de l'Hospital.**
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$$

   Solution. La fraction $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.
   Comme tout intervalle ouvert contenant 1 rencontre le domaine de définition A, le calcul de la limite en 1 peut être envisagé et on a
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+2} = 0.$$