1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Mathématiques générales A : corrigé du test 4

Version 4 décembre 2012

Corrigé du test 4 du 3-12-2012

1. (a) **Qu'appelle-t-on un découpage de $[a, b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$) ?**
   (b) **Définir une fonction intégrable sur $[a, b]$.**

Solution. (a) Un découpage d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'un naturel strictement positif n et de $n-1$ points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ de $]a, b[$

(b) La largeur d'un découpage de $[a, b]$ est le nombre $L(\sigma) = \sup\{x_1 - a,\ x_2 - x_1, \ldots, b - x_{n-1}\}$. Si f est une fonction définie sur un intervalle borné fermé $[a, b]$ et si σ est un découpage de cet intervalle, on définit la somme $S(\sigma, f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(r_k)(x_k - x_{k-1})$ où $r_k \in [x_{k-1}, x_k]$ pour tout k ($a = x_0$ et $b = x_n$).

La fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si, pour toute suite de découpages σ_N ($N \in \mathbb{N}_0$) de $[a, b]$ tels que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} L(\sigma_N) = 0$, la suite $S(\sigma_N, f)$ ($N \in \mathbb{N}_0$) converge vers une limite finie.

2. **Calculer (si possible) la limite suivante.**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^4 + 3}{\ln(1-x)}$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2x^4 + 3}{\ln(1-x)}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0,\ \ln(1-x) \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, ensemble non minoré. La limite en $-\infty$ peut dont être envisagée.

Par application du théorème de la limite d'une fonction composée, on a

$$\lim_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty \text{ et } \lim_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) = +\infty.$$

De plus, comme la limite en $-\infty$ du numérateur vaut $-\infty$, on a une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$ qu'on lève par application du théorème de l'Hospital.

Soient $V =]-\infty, -\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand et les fonctions $f_1 : x \mapsto -2x^4 + 3$ et $f_2 : x \mapsto \ln(1-x)$. Vérifions les hypothèses du théorème ; on a
1) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f_2 sur $]-\infty, 1[$; ces 2 fonctions sont donc dérivables sur V
2) $Df_2(x) = \dfrac{1}{x-1} \neq 0 \ \forall x \in V$
3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty$ (cf. ci-dessus)
4) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-8x^3}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to -\infty} (-8x^3(x-1)) = \lim_{x \to -\infty} (-8x^4) = -\infty.$
Dès lors par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut $-\infty$.

3. **Primitiver la fonction donnée explicitement par $f(x) = 2x^3 \cos(5x^4 + 1)$. Spécifier l'intervalle dans lequel vous travaillez.**

Solution. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on primitive sur $\mathbb{R}$. En effectuant la substitution $5x^4 + 1 = t$, on a successivement

$$\int 2x^3 \cos(5x^4+1)\, dx = \frac{1}{10} \int 20\, x^3 \cos(5x^4+1)\, dx = \frac{1}{10} \left(\int \cos(t)\, dt \right)_{t = 5x^4+1}$$

$$\simeq \frac{1}{10} (\sin(t))_{t=5x^4+1} \simeq \frac{1}{10} \sin(5x^4+1),\ x \in \mathbb{R}.$$

Corrigé du test 4 du 5-12-2012

1. Résoudre en **rédigeant clairement** la solution du problème suivant.
Un laborantin doit préparer une solution de 14 ml qui contient 7,5% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 15% de glucose et l'autre seulement 3%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

Solution. La solution à préparer doit contenir $14\ .\ \frac{7{,}5}{100}$ ml de glucose. Si on note x le nombre de ml de la solution contenant 15% de glucose et $14-x$ le nombre de ml de la solution contenant 3% de glucose, on a l'équation

$$\frac{15x}{100}+\frac{3(14-x)}{100}=\frac{14\ .\ 7,5}{100}\Leftrightarrow 12x+42=105\Leftrightarrow 12x=63\Leftrightarrow x=5,25.$$

On doit donc prendre 5,25 ml de la solution contenant 15% de glucose et $14-5,25=8,75$ ml de la solution contenant 3% de glucose pour obtenir une solution de 14 ml qui contient 7,5 % de glucose.

2. **Primitiver la fonction donnée explicitement par** $f(x)=(3x-2)\exp(-2x)$.
Spécifier l'intervalle dans lequel vous travaillez.

Solution. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on primitive sur $\mathbb{R}$. En effectuant une primitivation par parties, on a successivement

$$\int(3x-2)\exp(-2x)\ dx=\int(3x-2)D\left(\frac{\exp(-2x)}{-2}\right)\ dx\simeq\frac{(-3x+2)\exp(-2x)}{2}+\frac{3}{2}\int\exp(-2x)\ dx$$

$$\simeq\frac{(-3x+2)\exp(-2x)}{2}-\frac{3\exp(-2x)}{4}\simeq\frac{(-6x+1)\exp(-2x)}{4},\ x\in\mathbb{R}.$$

3. **Calculer (si possible) l'intégrale suivante.**

$$\int_1^3 x\sqrt[4]{3x^2-2}\ dx$$

Solution. La fonction $f: x\mapsto x\sqrt[4]{3x^2-2}$ est continue sur

$$\{x\in\mathbb{R}: 3x^2-2\geq 0\}=\left]-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty\right[$$

donc sur l'ensemble borné fermé $[1,3]$. Dès lors, elle est intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_1^3 x\sqrt[4]{3x^2-2}\ dx=\frac{1}{6}\int_1^3 6x\ \sqrt[4]{3x^2-2}\ dx=\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\ \sqrt[4]{(3x^2-2)^5}\right]_1^3=\frac{2}{15}(25\sqrt{5}-1).$$

Corrigé du test 4 du 7-12-2012

1. Résoudre en **rédigeant clairement** la solution du problème suivant.
Un laborantin doit préparer une solution de 12 ml qui contient 5,5 % de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 12% de glucose et l'autre seulement 4%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

Solution. La solution à préparer doit contenir 12 . $\frac{5,5}{100}$ ml de glucose. Si on note x le nombre de ml de la solution contenant 12% de glucose et $12 - x$ le nombre de ml de la solution contenant 4% de glucose, on a l'équation

$$\frac{12x}{100} + \frac{4(12-x)}{100} = \frac{12\ .\ 5,5}{100} \Leftrightarrow 8x + 48 = 66 \Leftrightarrow 8x = 18 \Leftrightarrow x = 2,25.$$

On doit donc prendre 2,25 ml de la solution contenant 12% de glucose et $12 - 2,25 = 9,75$ ml de la solution contenant 4% de glucose pour obtenir une solution de 12 ml qui contient 5,5 % de glucose.

2. **Primitiver la fonction donnée explicitement par** $f(x) = (2x-3)\ln(-2x)$.
Spécifier l'intervalle dans lequel vous travaillez.

Solution. La fonction f étant continue sur $]-\infty, 0[$, on primitive sur $]-\infty, 0[$. En effectuant une primitivation par parties, on a successivement

$$\int (2x-3)\ln(-2x)\ dx = \int D(x^2-3x)\ln(-2x)\ dx \simeq (x^2-3x)\ln(-2x) - \int \frac{x^2-3x}{x}\ dx$$

$$\simeq (x^2-3x)\ln(-2x) - \int (x-3)\ dx \simeq (x^2-3x)\ln(-2x) - \frac{x^2}{2} + 3x,\ x \in]-\infty, 0[.$$

3. **Calculer (si possible) l'intégrale suivante.**

$$\int_0^1 x^3 e^{2x^4-1} dx$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto x^3 e^{2x^4-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'ensemble borné fermé $[0,1]$. Dès lors, elle est intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^1 x^3 e^{2x^4-1}\ dx = \frac{1}{8}\int_0^1 8x^3\ e^{2x^4-1}\ dx = \left[\frac{1}{8}\ e^{2x^4-1}\right]_0^1 = \frac{1}{8}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2-1}{8e}.$$