Mathématiques générales A
Examen du jeudi 24 janvier 2013

CORRIGE

Théorie

Question 1. Définir la continuité et la dérivabilité d'une fonction g en un point a de son domaine de définition. Enoncer et démontrer le lien entre ces deux notions.

Pour une réponse « type », voir notes de cours et/ou ce qui a été fait au cours lui-même.

Question 2. Comment déterminer la mesure de l'angle entre deux vecteurs dont on connaît les composantes dans un repère orthonormé de l'espace ? Donner 2 méthodes possibles.

Un exemple de réponse « type »

La mesure de l'angle (non orienté) entre deux vecteurs libres non nuls intervient dans les définitions des produits scalaire (1) et vectoriel (2) de ces vecteurs.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs libres non nuls, notons θ la mesure de l'angle entre les deux vecteurs ($\theta \in [0,\pi]$) et $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ les normes de ces vecteurs. Notons également u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3 leurs composantes respectives dans la base associée au repère orthonormé donné.

(1) Cela étant, le produit scalaire (noté $\bullet$) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel défini par

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \ = \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \ \cos(\theta).$$

On démontre alors que le produit scalaire s'exprime analytiquement par

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \ = \ u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Dès lors on peut déterminer $\cos(\theta)$ en utilisant l'expression

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} \ \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \ \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

et on obtient θ par

$$\theta = \arccos\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \ \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\right).$$

(2) Le produit vectoriel (noté $\wedge$) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur dont la norme est définie de la façon suivante

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \ = \ \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \ \sin(\theta).$$

Si l'on exprime les normes en utilisant les composantes des vecteurs (cf ci-dessous, note), on obtient donc $\sin(\theta)$ et ensuite θ par

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|}\right) \quad \text{si} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

et

$$\theta = \pi \ - \ \arcsin\left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|}\right) \quad \text{si} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

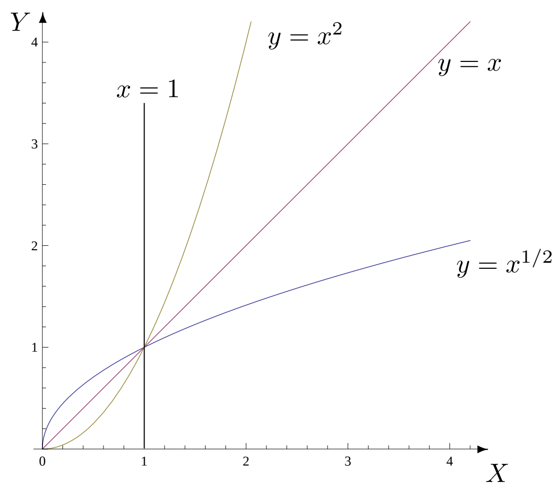
Note : la norme d'un vecteur s'exprimant comme la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes, il reste à donner les composantes du produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en utilisant les données. Celles-ci sont

$$u_2v_3 - u_3v_2, \ -(u_1v_3 - u_3v_1), \ u_1v_2 - u_2v_1.$$

Question 3.

– **Quelle est la définition de l'intégrabilité d'une fonction continue sur $[1, +\infty[$ et à valeurs positives sur cet intervalle ?**
– **Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel θ pour que la fonction $x \mapsto x^\theta$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$? Démontrer ce résultat en vous servant de la définition de l'intégrabilité que vous donnez au point précédent.**
– **Dans un même repère orthonormé du plan, représenter la fonction x^θ, $x > 0$ pour $\theta = 1/2, 1, 2$ et interpréter l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$.**

Pour une réponse « type », voir notes de cours (en prenant bien soin de remarquer que la notation employée pour le paramètre n'est pas la même) et/ou ce qui a été fait au cours lui-même.



On peut interpréter l'intégrabilité de la façon suivante : pour les différentes valeurs de θ données, l'aire sous la courbe dont il est question dans l'énoncé est infinie.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, résoudre l'équation suivante**
$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x.$$

Solution. L'équation est équivalente à $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et on a
$$\left(3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(4x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{8} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right).$$
Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont $-\frac{15\pi}{16}$, $-\frac{7\pi}{8}$, $-\frac{7\pi}{16}$, $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{9\pi}{16}$.

(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right), \qquad e^{2\ln(5)}, \qquad e^{-i\pi/2}$$

Solution. La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{im}(\sin) = [-1, 1] = \operatorname{dom} \arcsin$; la première expression est donc définie. On a $\arcsin(\sin(x)) = x \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Dès lors,
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}.$$

La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$; la deuxième expression est donc définie. Comme $2\ln(5) = \ln(5^2)$, les fonctions logarithme et exponentielle étant des fonctions inverses l'une de l'autre, on a $e^{2\ln(5)} = 25$.

Enfin, la fonction exponentielle est définie dans $\mathbb{C}$. Comme $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2) = -i.$$

(c) Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes $\dfrac{1}{i+1}$ **et** e^{3i}

Solution. Le premier complexe donné est égal à $\dfrac{1-i}{2}$. Sa partie réelle est donc $\dfrac{1}{2}$ et sa partie imaginaire $-\dfrac{1}{2}$. Par définition, $\cos(x) = \Re e^{ix}$ et $\sin(x) = \Im e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$. Le deuxième complexe est égal à $\cos(3) + i\sin(3)$. Sa partie réelle est $\cos(3)$ et sa partie imaginaire $\sin(3)$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{2x}, \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{|x^2-x-6|}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto xe^{2x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Pour lever l'indétermination $-\infty\ .\ 0$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $\dfrac{x}{e^{-2x}}$. En effet, si $V =]-\infty, -\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ assez grand), on a
1) $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto e^{-2x}$ sont dérivables dans V
2) $Dg(x) = -2e^{-2x} \neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-2e^{-2x}} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$
Dès lors, la limite cherchée vaut 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-9}{|x^2-x-6|}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 3\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 3 rencontre $A \cap]-\infty, 3[=]-\infty, 3[\setminus \{-2\}$, le calcul de la limite en 3^- peut être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{|x^2-x-6|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x+2)(x-3)} = -\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x+2} = -\frac{6}{5}.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_{-\pi/3}^{0} \sin x \cos(3x)\ dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+9x^2} dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \sin x\cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[-\frac{\pi}{3}, 0]$. Cela étant, comme $\sin x \cos(3x) = \frac{1}{2}(\sin(4x) - \sin(2x))$, on a

$$\int_{-\pi/3}^{0} \sin x \cos(3x)\ dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{4+9x^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et on a

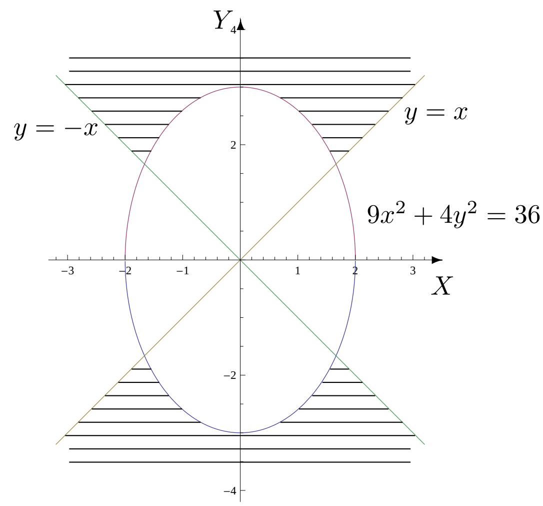
$$\int_0^t \frac{1}{4+9x^2}\ dx = \frac{1}{6}\left[\text{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right)\right]_0^t = \frac{1}{6}\text{arctg}\left(\frac{3t}{2}\right).$$

Dès lors,
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{4+9x^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\text{arctg}\left(\frac{3t}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{12}.$$
Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{4+9x^2}$ est à valeurs positives et que la limite précédente est finie, la fonction est intégrable et la valeur de son intégrale sur $[0,+\infty[$ vaut $\frac{\pi}{12}$.

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R}, |x|\le|y| \text{ et } 9x^2+4y^2\ge 36\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) Montrer que la fonction** $x\mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ **vérifie l'équation différentielle**

$$(x^2+x)D^2f(x)+Df(x)=1$$

Solution. La fonction donnée est infiniment dérivable sur $]0,+\infty[$. Comme $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, on a
$$D\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x} \quad \text{et} \quad D^2\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^2} \ \text{ pour tout } \ x>0.$$
Dès lors,
$$(x^2+x)D^2f(x)+Df(x) = \frac{x^2+x}{x^2} + \left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{x^2+x-x}{x^2} = 1$$
et la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle

$$D^2f(x)+Df(x)-2f(x)=e^x$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x)+Df(x)-2f(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto z^2+z-2$ dont les zéros sont -2 et 1. Il s'ensuit que les solutions réelles de l'équation homogène sont les fonctions
$$c_1\,e^{-2x}+c_2\,e^x,\ x\in\mathbb{R}$$
où c_1,c_2 sont des constantes réelles arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 0 par une

exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 1$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = A \,.\, e^x \,.\, x,\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme $Df_P(x) = A(x+1)e^x$ et $D^2 f_P(x) = A(x+2)e^x$, on a $A(x+2)e^x + A(x+1)e^x - 2Ax\, e^x = e^x \Leftrightarrow A = 1/3$.
Ainsi, $f_P(x) = \dfrac{x}{3}\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1\, e^{-2x} + \left(c_2 + \frac{x}{3}\right) e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Lors d'un jeu télévisé, 6 participants déplacent un gros tas de sable en un quart d'heure. Dans les mêmes conditions, combien de temps 4 participants mettraient-ils pour déplacer ce même tas de sable ?
Solution. Si 6 participants déplacent le tas en 1/4h =15 minutes, 1 participant met 6 fois plus de temps soit $6 \times 15 = 90$ minutes. Dès lors, 4 participants mettront 4 fois moins de temps qu'un participant soit $90 : 4 = 22$ minutes et 30 secondes.
Ainsi, 4 participants mettraient 22 minutes et 30 secondes pour déplacer ce tas de sable.

Exercices BIS

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)**

$$x\ |2+x| \ \leq\ x^2$$

Solution. Tout réel négatif x est solution puisque le premier membre de l'inéquation est négatif tandis que le second est positif.
Considérons $x > 0$. L'inéquation est alors équivalente à $|2+x| \leq x \Leftrightarrow 2 + x \leq x$, inégalité toujours fausse.
Dès lors, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, 0]$.

2. **Dans un repère orthonormé, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(1, -2)$ et $(-3, 4)$ ainsi que la droite d dont des équations paramétriques cartésiennes sont**

$$\begin{cases} x = 1 + r \\ y = -3r \end{cases} ,\ r \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite d.
Représenter la droite d, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur obtenu comme projection orthogonale.
Solution. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(-4, 6)$ et un vecteur directeur de d a pour composantes $(1, -3)$. Dès lors les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur la doite d sont données par

$$\frac{-4\ .\ 1 + 6\ .\ (-3)}{1^2 + (-3)^2}(1, -3) = \frac{-22}{10}(1, -3) = \left(-\frac{11}{5}, \frac{33}{5}\right).$$