1, 2, 3... Sciences

Année académique 2012-2013

Corrigé de l'examen de math B du 16 août 2013
chimistes, géographes, physiciens et informaticiens

Version 11 juillet 2013

Exercices

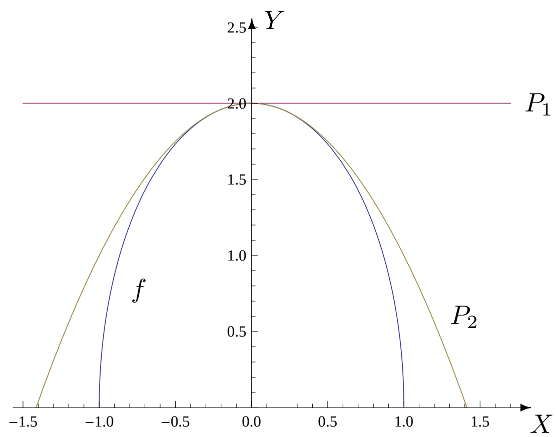
1. **On donne la fonction f par $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.**
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter (au voisinage de 0) le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et on a $Df(x) = -2x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ et

$$D^2f(x) = -2(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} - 2x^2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}} = 2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-1+x^2-x^2) = -2(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

Comme $f(0) = 2,\ Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 2, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 2 - x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) Soient un réel a et la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & \cos(a-\pi) \end{pmatrix}.$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in [0, 2\pi]$ la matrice est-elle inversible ? Justifier.
- Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

Solution. La matrice A est définie si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Comme $\mathrm{tg}(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$ et $\cos(a - \pi) = -\cos(a)$, on a

$$\det A = -\sin(a) - 2\sin(a)\cos(a) = -\sin(a)(1 + 2\cos(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq k\pi \text{ et } a \neq \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi, comme $a \in [0, 2\pi]$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, la matrice A est inversible pour tout a différent de $0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ et 2π.

La matrice des cofacteurs de A étant égale à

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\cos(a) & -\sin(a) \\ -2\cos(a) & \mathrm{tg}(a) \end{pmatrix},$$

l'inverse de A est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\sin(a)(1 + 2\cos(a))} \begin{pmatrix} \cos(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\mathrm{tg}(a) \end{pmatrix},\ a \in]0, 2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

et on a

$$\begin{aligned}
A.A^{-1} &= \frac{1}{\sin(a)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \mathrm{tg}(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\cos(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(a) & 2\cos(a) \\ \sin(a) & -\mathrm{tg}(a)\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sin(a)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \sin(a)+2\cos(a)\sin(a) & 2\,\mathrm{tg}(a)\cos(a)-2\,\mathrm{tg}(a)\cos(a) \\ \sin(a)\cos(a)-\sin(a)\cos(a) & 2\sin(a)\cos(a)+\sin(a)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sin(a)(1+2\cos(a))}\begin{pmatrix} \sin(a)(1+2\cos(a)) & 0 \\ 0 & \sin(a)(1+2\cos(a))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Une étude relative à la présence au travail en hiver a montré que les salariés peuvent être en bonne santé (B) ou être enrhumés (R) ou être grippés (G) ; dans les deux premiers cas, ils sont présents au travail sinon ils restent chez eux. D'un jour à l'autre, on constate les évolutions suivantes
- étant en bonne santé, un salarié a 3 chances sur 5 de le rester le lendemain et 2 chances sur 5 de devenir enrhumé
- étant enrhumé, il a 1 chance sur 4 de le rester le jour suivant, 1 chance sur 4 d'avoir la grippe mais aussi 1 chance sur 2 d'être guéri
- enfin, étant grippé, il a 1 chance sur 2 de rester grippé et 1 chance sur 2 d'être en bonne santé.
Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail.

Solution. Soient B_0, G_0 et R_0 respectivement l'état de santé fixé au départ et B_1, G_1 et R_1 respectivement le lendemain. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ G_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 \\ G_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

La situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x+5y+5z=0 \\ -2y+z=0 \\ 8x-15z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{15}{4}y \\ z=2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4}y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(15+4+8) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{27}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{27} \\ \frac{8}{27} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail est de $4/27$.

3. **a) On donne la fonction f par**

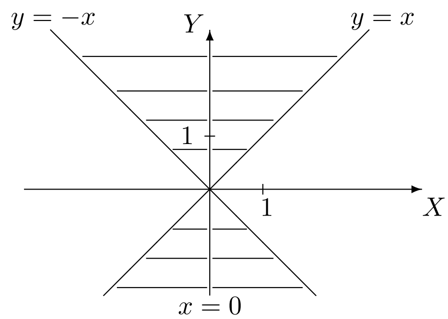
$$f(x,y)=\ln\left(\sqrt{y^2-x^2}\right)-\operatorname{arcotg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0,\ y^2-x^2>0\right\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des droites d'équation cartésienne $x=0$, $y=x$ et $y=-x$ sont exclus de l'ensemble.



-En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?

Solution. En un point de A, on a

$$D_xf(x,y)=D_Z\ln(Z)|_{Z=\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ D_T\sqrt{T}|_{T=y^2-x^2}\ .\ D_x(y^2-x^2)-D_U\operatorname{arcotg}(U)|_{U=\frac{y}{x}}\ .\ D_x\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ (-2x)-\left(\frac{-1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\ .\ \left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-x}{y^2-x^2}-\frac{y}{x^2+y^2}$$

et

$$D_yf(x,y)=D_Z\ln(Z)|_{Z=\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ D_T\sqrt{T}|_{T=y^2-x^2}\ .\ D_y(y^2-x^2)+D_U\operatorname{arctg}(U)|_{U=\frac{y}{x}}\ .\ D_y\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y^2-x^2}}\ .\ 2y-\left(\frac{-1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\ .\ \frac{1}{x}=\frac{y}{y^2-x^2}+\frac{x}{x^2+y^2}$$

Remarque : comme $y^2-x^2>0$, on peut écrire $\ln\left(\sqrt{y^2-x^2}\right)=\frac{1}{2}\ln(y^2-x^2)$, ce qui permet de calculer plus rapidement les dérivées partielles.

- En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, que vaut

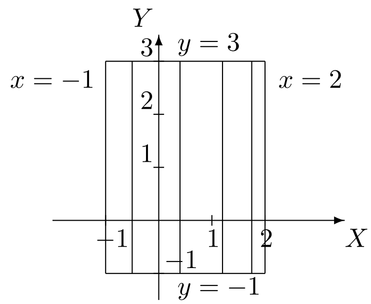
$$xD_xf(x,y)+yD_yf(x,y)$$

Solution. L'expression donnée vaut donc

$$x\left(\frac{-x}{y^2-x^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\right)+y\left(\frac{y}{y^2-x^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{y^2-x^2}=1.$$

b) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale $\iint_E(3y^2+xy^2)\ dx\ dy$ sur $E=[-1,2]\times[-1,3]$ et représenter l'ensemble d'intégration E en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration E ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x, y) \mapsto 3y^2 + xy^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur E, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_E (3y^2 + xy^2)\ dx\ dy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{-1}^{3} (3y^2 + xy^2)\ dy \right)\ dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} \left[(3+x)y^3 \right]_{y=-1}^{y=3}\ dx$$

$$= \frac{28}{3} \int_{-1}^{2} (3+x)\ dx = \frac{28}{3} \left[3x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{28}{3} \left(6 + 2 + 3 - \frac{1}{2} \right) = \frac{28}{3}\ .\ \frac{21}{2} = 98.$$

c) On considère la succession d'intégrales simples suivante

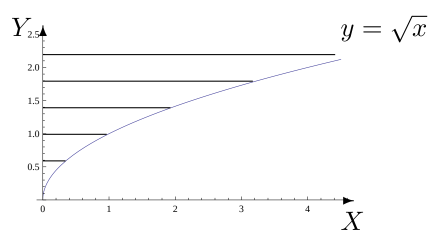
$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}\, dx \right)\, dy.$$

- Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}$ est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5y^2 - x > 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration $A \setminus \{(0,0)\}$ si

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[,\ x \in [0, y^2]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [\sqrt{x}, +\infty[\},$$

ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}\, dy \right)\, dx.$$

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A \setminus \{(0,0)\}$.
Pour y fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}$ est continue sur le fermé borné $[0, y^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{y^2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{5y^2 - x}}\ dx = (-e^{-y})\ .\ \left[2\sqrt{5y^2 - x} \right]_0^{y^2} = 2(\sqrt{5} - 2)y\, e^{-y}.$$

La fonction $h : y \mapsto 2(\sqrt{5}-2)y\, e^{-y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$ non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t>0$, en intégrant par parties, on a

$$\int_0^t 2(\sqrt{5}-2)y\, e^{-y}\ dy = 2(\sqrt{5}-2)\left([-ye^{-y}]_0^t + \int_0^t e^{-y}\ dy\right) = 2(\sqrt{5}-2)(-te^{-t}-e^{-t}+1)$$

Dès lors, comme

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty}(te^{-t}) = 0$$

puisque, par application du théorème de l'Hospital, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste à l'infini, on a

$$\lim_{t\to+\infty} 2(\sqrt{5}-2)(-te^{-t}-e^{-t}+1) = 2(\sqrt{5}-2).$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$.

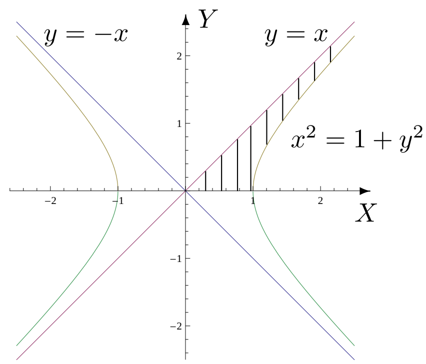
Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{5x^2-y}}\, dy\right) dx = 2(\sqrt{5}-2).$$

4. **a) On donne l'ensemble fermé non borné E suivant**

$$E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x,y\geq 0,\ y^2\leq x^2\leq 1+y^2\right\}.$$

- Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Si f est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, exprimer la valeur de son intégrale sur E en intégrant successivment par rapport à y (resp. x) puis par rapport à x (resp. y).
- Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pourquoi ?
Solution. La représentation graphique de l'ensemble d'intégration est la suivante ; les points des 'bords" sont compris dans l'ensemble.



L'intégrale de f sur E est donnée par

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_y^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)\ dx\right) dy$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)\ dy\right) dx + \int_1^{+\infty}\left(\int_{\sqrt{x^2-1}}^x f(x,y)\ dy\right) dx.$$

On trouve la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration car la fonction est intégrable sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ donc sur E.

b) Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-e)^m}{e^{2m+3}}, \qquad\qquad (ii)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}.$$

Solution. La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-e)^m}{e^{2m+3}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\frac{1}{e^3} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{e}\right)^m$, série géométrique convergente puisque la raison $\frac{-1}{e} \in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{e^3} \cdot \left(\frac{-1}{e}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{e}\right)^m = \left(\frac{-1}{e^4}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{e}} = \frac{-1}{e^3(e+1)}.$$

La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\sqrt{3}) - 1$.